第 36 卷第 4 期　　数 学 学 报　　Vol.36, No. 4
1993 年 7 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　July, 1993

二阶非线性中立型方程非振动解的渐近性和存在性

卢武度

(华南师范大学数学系，广州　510631)

摘　要

本文研究二阶非线性中立型方程 (2) 非振动解的渐近性和存在性. 当 $0 \le \sum_{i=1}^m c_i(t) < 1$ 时， (2) 最多有 $S(0,0,0)$, $S(b,a,0)$, $S(\infty,\infty,0)$ 和 $S(\infty,\infty,d)$ 四种类型的非振动解. 我们给出了各种类型非振动解存在的充分条件或充分必要条件.

关键词: 中立型方程、非振动解、渐近性、存在性

§1. 引言

十多年来，各国学者对二阶滞后型和超前型微分方程非振动解的渐近性质和存在性的研究已有很深入的结果 [1–2], 但对二阶中立型方程非振动解存在性的研究却进展不大. 文献 [3] 研究了方程

$$x'' - cx''(t-r) + q(t)x(g(t)) = 0 \tag{1}$$

非振动解存在性问题. 它力图将 (1) 化为一个滞后型方程来研究 (在 $0 \le c < 1$ 的情况下) 并进行了一番有益的尝试. 不过 [3] 仅讨论了满足 $x(t)[x(t) - cx(t-r)] > 0$ 的非振动解的渐近性分类和存在性. 除了对非振动解的分类不全面之外， [3] 中某些定理的证明还有不妥当的地方 (如 [3] 中的定理 3 和 4). 而且该文的方法很难应用于含有多于一个滞后量 r_i 或含有非滞后型偏差变元 $g_z(t)$ 的情况，也难应用于 $c_i(t)$ 不为常数函数的情况.

本文讨论下述非线性中立型方程

$$\left[x(t) - \sum_{i=1}^m c_i(t)x(t-r_i)\right]'' + \sum_{j=1}^n f_j(t, x(g_{j_1}(t)), \cdots, x(g_{j_l}(t))) = 0\ , \tag{2}$$

其中 $t \ge t_0 > 0$, $r_i > 0$, $c_i(t), g_{j_s}(t) \in C[t_0,\infty)$, $c_i(t) \ge 0$, $\lim_{t\to\infty} g_{j_s}(t) = \infty$, $f_j(t, x_1, \cdots, x_l)$ 是其变元的连续函数， $i \in I_m = \{1,2,\cdots,m\}$, $j \in I_n = \{1,2,\cdots,n\}$, $s \in I_l = \{1,2,\cdots,l\}$.

在 $\sum_{i=1}^m c_i(t) < 1$ 的情况下 (限于篇幅，其他情况将在另文中讨论), 我们对非线性方程 (2) 的非振动解进行了全面的分类. 其渐近性质最多有 $S(0,0,0)$, $S(b,a,0)$, $S(\infty,\infty,0)$ 和

1990 年 7 月 2 日收到， 1991 年 10 月 30 日收到修改稿.

$S(\infty,\infty,d)$ 四种类型. 并利用 Schauder 不动点定理和构造单调收敛函数序列的方法给出各种类型非振动解存在的充分条件或充分必要条件.

(2) 的一个解称为振动的，如果它有任意大的零点；否则称为非振动的.

§2. 定理和证明

在这篇文章，我们总设

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(t) \le 1-\delta, \quad 0<\delta<1\ . \tag{3}$$

$f_j(t,x_1,\cdots,x_l)$ $(j\in I_n)$ 满足条件

(a) 在 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 同号时，f_j 与 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 同号并且当 $x_i\ge y_i>0$ 或 $y_i\le x_i<0$ $(i\in I_l)$ 时，成立

$$f_j(t,x_1,\cdots,x_l)\ge f_j(t,y_1,\cdots,y_l), \quad j\in I_n\ .$$

记

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{m} c_i(t)x(t-r_i)\ . \tag{4}$$

引理 1 设 (3) 成立，f_j $(j\in I_n)$ 满足条件 (a)，$x(t)$ 是 (2) 的一个最终正解 (负解). 如果 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$, 那么 $y(t)$ 最终为负 (正) 且有 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$; 否则 $y(t)$ 最终为正 (负).

证明 设 $x(t)$ 是 (2) 的最终正解. 由 (2) 知，最终有 $y''(t)<0$. 所以 $y'(t)$ 是递减的，最终应有 $y'(t)>0$ 或 $y'(t)<0$. 从而最终应有 $y(t)>0$ 或 $y(t)<0$. 如果 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$, 则 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$. 易知必有 $\lim_{t\to\infty} y'(t)=0$. 所以又有 $y'(t)>0$. 这说明 $y(t)$ 是最终单调增加的. 由 $\lim_{t\to\infty} y(t)=0$ 可知应有 $y(t)<0$. 如果 $x(t)$ 的极限不为零，则有 $\lim_{t\to\infty}\sup x(t)>0$. 我们说这时必最终有 $y(t)>0$. 不然的话，最终有 $y(t)<0$. 这时，如果 $x(t)$ 是无界的，必存在序列 $\{t_k\}$, $\lim_{k\to\infty} t_k=\infty$, 使 $x(t_k)=\max_{t\le t_k} x(t)$ 且 $\lim_{k\to\infty} x(t_k)=\infty$. 由 (4) 得

$$y(t_k)=x(t_k)-\sum_{i=1}^{m} c_i(t_k)x(t_k-r_i)\ge x(t_k)\left(1-\sum_{i=1}^{m} c_i(t_k)\right)\ . \tag{5}$$

由 (3) 和 (5) 知，$\lim_{k\to\infty} y(t_k)=+\infty$. 这是一个矛盾. 如果 $x(t)$ 是有界的，又必存在序列 $\{t_k\}$ 使 $\lim_{k\to\infty} x(t_k)=\lim_{t\to\infty}\sup x(t)$. 由于 $\{c_i(t_k)\}$ 和 $\{x(t_k-r_i)\}$ $(i\in I_m)$ 皆是有界序列，从中可抽出收敛子列，故不失一般性，可设极限 $\lim_{k\to\infty} c_i(t_k)$ 和 $\lim_{k\to\infty} x(t_k-r_i)$ $(i\in I_m)$ 皆存在，于是

$$\begin{aligned} 0\ge \lim_{k\to\infty} y(t_k) &= \lim_{k\to\infty}\left[x(t_k)-\sum_{i=1}^{m} c_i(t_k)x(t_k-r_i)\right] \\ &\ge \lim_{t\to\infty}\sup x(t)\left[1-\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{m} c_i(t_k)\right]>0\ . \end{aligned}$$

这也是一个矛盾，所以最终应有 $y(t)>0$. 同理可证 $x(t)$ 是最终负解的情况. 证毕.

引理 2 设 (3) 成立, $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^m c_i(t) = c$ $(0 \le c < 1)$, $x(t) > 0$ $(x(t) < 0)$. 如果 $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ (a 为常数), 则 $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{1-c}$; 如果 $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty(-\infty)$, 则 $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty(-\infty)$.

证明 设 $x(t) > 0$. 因 $x(t) \ge y(t)$, 故当 $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$. 下设 $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$, 则 $y(t)$ 是有界的. 类似引理 1 的证明 (参考 (5) 式), 可知 $x(t)$ 必有界. 于是存在序列 $\{t_k\}$ 使 $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = \lim_{t\to\infty}\sup x(t)$. 因序列 $\{c_i(t_k)\}$ 和 $\{x(t_k - r_i)\}$ $(i \in I_m)$ 皆有界, 从中可抽出收敛子列, 故不失一般性, 可设 $\lim_{k\to\infty} c_i(t_k)$ 和 $\lim_{k\to\infty} x(t_k - r_i)$ 皆存在, 于是

$$\begin{aligned} a = \lim_{k\to\infty} y(t_k) &= \lim_{k\to\infty} x(t_k) - \sum_{i=1}^m \lim_{k\to\infty} c_i(t_k) \lim_{k\to\infty} x(t_k - r_i) \\ &\ge \lim_{t\to\infty}\sup x(t)\left[1 - \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^m c_i(t_k)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\sup x(t)(1-c)\ , \end{aligned}$$

$$\frac{a}{1-c} \ge \lim_{t\to\infty}\sup x(t)\ . \tag{6}$$

另一方面, 存在序列 $\{t'_k\}$ 使 $\lim_{k\to\infty} x(t'_k) = \lim_{t\to\infty}\inf x(t)$. 不失一般性可设 $\lim_{k\to\infty} c_i(t'_k)$ 和 $\lim_{k\to\infty} x(t'_k - r_i)$ $(i \in I_m)$ 皆存在, 则

$$\begin{aligned} a = \lim_{k\to\infty} y(t'_k) &= \lim_{k\to\infty} x(t'_k) - \sum_{i=1}^m \lim_{k\to\infty} c_i(t'_k) \lim_{k\to\infty} x(t'_k - r_i) \\ &\le \lim_{t\to\infty}\inf x(t)\left[1 - \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^m c_i(t'_k)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\inf x(t)(1-c)\ , \end{aligned}$$

$$\frac{a}{1-c} \le \lim_{t\to\infty}\inf x(t)\ . \tag{7}$$

由 (6) 和 (7) 得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{1-c}$. 类似可证 $x(t) < 0$ 的情况. 证毕.

定理 1 设 (3) 和 (a) 成立, $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^m c_i(t) = c$ $(0 \le c < 1)$, 则 (2) 的非振动解最多有以下四种类型.

1. $S(0,0,0)$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$;
2. $S(b,a,0)$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = b = \frac{a}{1-c}$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$, $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$, 其中 $a \ne 0$;
3. $S(\infty,\infty,0)$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$;
4. $S(\infty,\infty,d)$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} y'(t) = d$, 其中 $d \ne 0$.

证明 设 $x(t)$ 为 (2) 的一个最终正解, 则或者 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ 或者 $x(t)$ 的极限不为零. 由引理 1, 当 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ 时, $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$, 从而 $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$. 此时 $x(t) \in S(0,0,0)$. 当 $x(t)$ 的极限不为零时, 最终有 $y(t) > 0$, 于是易证最终有 $y'(t) > 0$, $y''(t) < 0$. 所以 $y(t)$ 是递增的. 如果 $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ $(a > 0)$, 则易知 $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$, 并由引理 2 得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{1-c} = b$. 此时 $x(t) \in S(b,a,0)$. 如果 $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$, 由引理 2 得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$ 并且因 $y'(t)$ 递减, 所以或者有 $\lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$ 或者有

$\lim_{t\to\infty} y'(t)=d\ (d>0)$. 此时有 $x(t)\in S(\infty,\infty,0)$ 或者 $x(t)\in S(\infty,\infty,d)$, 类似可证 $x(t)$ 为最终负解的情况. 证毕.

定义 设 $\{f(t)\}$ 为 $[t_0,\infty)$ 上的一族函数. 如果把 $[t_0,\infty)$ 划分为有限个子区间使在每一个子区间上所有函数的振幅都小于 $\varepsilon>0$, 则称这种划分是 $[t_0,\infty)$ 对应于函数族 $\{f(t)\}$ 的一种有限 ε 分法.

$C[t_0,\infty)$ 中的一族函数 $\{f(t)\}$ ($\|f\|=\sup_{t\geq t_0}|f(t)|$) 是相对紧的，如果它是一致有界且对任一 $\varepsilon>0$, $[t_0,\infty)$ 有一种对应于族 $\{f(t)\}$ 的有限 ε 分法 [5].

定理 2 设 (3) 和 (a) 成立， $|c_i(t_2)-c_i(t_1)|\leq K|t_2-t_1|$ $(i\in I_m)$. 如果存在两个常数 $K_1>K_2>0$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(t)\exp(K_1 r_i)>1\geq \sum_{i=1}^{m} c_i(t)\ \exp(K_2 r_i)\ , \tag{8}$$

且当 t 充分大时成立

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{m} c_i(t)\exp(K_1 r_i)-1\right)\exp(-K_1 t)\\ \geq&\int_t^\infty (u-t)\sum_{j=1}^{n} f_j(u,\exp(-K_2 g_{j_1}(u)),\cdots,\exp(-K_2 g_{j_l}(u)))du\ ,\end{aligned} \tag{9}$$

则 (2) 存在最终正解 $x(t)\in S(0,0,0)$.

证明 设

$$S=\left\{x(t)\in C[t_0,\infty)\ :\ \begin{array}{c}\exp(-K_1 t)\leq x(t)\leq \exp(-K_2 t)\ \text{且有}\\ \\ |x(t_2)-x(t_1)|\leq L|t_2-t_1|,\ t_2\geq t_1\geq t_0\end{array}\right\}\ ,$$

其中常数 $L\geq\max\{K,K_1\}$.

如用 C_B 表示 $[t_0,\infty)$ 上全体有界连续函数组成的函数空间并在其中定义范数 $\|x\|=\sup_{t\geq t_0}$ $|x(t)|$, 则 C_B 是一个 Banach 空间. 容易验证 S 是 C_B 中的非空有界凸闭集. 也容易验证, 对任一 $\varepsilon>0$, $[t_0,\infty)$ 有一种对应于 S 的有限 ε 分法，所以 S 也是紧的. 简记

$$f(u,x(g(u))=\sum_{j=1}^{n} f_j(u,x(g_{j_1}(u)),\cdots,x(g_{j_l}(u))),$$

$$f(u,\exp(-K_2 g(u)))=\sum_{j=1}^{n} f_j(u,\exp(-K_2 g_{j_1}(u)),\cdots,\exp(-K_2 g_{j_l}(u)))\ .$$

定义 S 上的映射如下：

$$(M_x)(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i(t)x(t-r_i)-\int_t^\infty (u-t)f(u,x(g(u)))du, & t\geq T\\ \exp\left(\frac{\ln(M_x)(T)}{T}t\right), & t_0\leq t<T\ ,\end{cases} \tag{10}$$

其中 T 充分大使当 $t \geq T$ 时 (9) 成立且对取定的 $\alpha, 1-\delta<\alpha<1$, 有

$$\int_T^\infty f(u, \exp(-K_2 g(u)))du \leq \left(\alpha - \sum_{i=1}^m c_i(t)\right) L\ , \tag{11}$$

$$\alpha + \sum_{i=1}^m \exp(-K_2(t-r_i)) \leq 1\ . \tag{12}$$

(i) 设 $x \in S$. 当 $t \geq T$ 时，利用 (8) 和 (9) 得

$$\begin{aligned}
(M_x)(t) &\leq \sum_{i=1}^m c_i(t)x(t-r_i) \leq \sum_{i=1}^m c_i(t)\exp(-K_2(t-r_i)) \leq \exp(-K_2 t)\ ,\\
(M_x)(t) &\geq \sum_{i=1}^m c_i(t)\exp(-K_1(t-r_i)) - \int_t^\infty (u-t)f(u,\exp(-K_2 g(u)))du\\
&= \exp(-K_1 t) + \left(\sum_{i=1}^m c_i(t)\exp(K_1 r_i) - 1\right)\exp(-K_1 t)\\
&\quad - \int_t^\infty (u-t)f(u,\exp(-K_2 g(u)))du \geq \exp(-K_1 t),
\end{aligned}$$

于是

$$K_2 \leq \frac{-\ln(M_x)(T)}{T} \leq K_1\ . \tag{13}$$

由 (10) 易知 $(M_x)(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上连续且 $\exp(-K_1 t) \leq (M_x)(t) \leq \exp(-K_2 t)$. 当 $t_2 \geq t_1 \geq T$ 时，由 (11) 和 (12) 得

$$\begin{aligned}
&|(M_x)(t_1) - (M_x)(t_2)|\\
\leq &\left[\sum_{i=1}^m (c_i(t_2) + \exp(-K_2(t_1-r_i)))L + \int_{t_1}^\infty f(u,\exp(-K_2 g(u)))du\right]|t_2-t_1|\\
\leq &\left[\sum_{i=1}^m \exp(-K_2(t_1-r_i)) + \alpha\right] L|t_2-t_1| \leq L|t_2-t_1|\ .
\end{aligned}$$

由 (10) 和 (13) 并利用微分中值定理知上不等式对 $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ 也成立. 故 $M_x \in S$. 从而 $MS \subset S$ 是相对紧集.

(ii) 设 $x_k \in S$ 且 $\lim_{k\to\infty}\|x_k - x\| = 0$, 则 $x \in S$. 当 $t \geq T$ 时,

$$\begin{aligned}
&|(M_{x_k})(t) - (M_x)(t)|\\
\leq &\sum_{i=1}^m c_i(t)\|x_k - x\| + \int_T^\infty (u-T)|f(u,x_k(g(u))) - f(u,x(g(u)))|du\\
\leq &(1-\delta)\|x_k - x\| + \int_T^\infty (u-T)|f(u,x_k(g(u))) - f(u,x(g(u)))|du\ .
\end{aligned} \tag{14}$$

由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{k\to\infty}(\sup_{t\geq T}|(M_{x_k})(t) - (M_x)(t)|) = 0\ . \tag{15}$$

易证

$$\sup_{t_0\le t\le T}|(M_{x_k})(t)-(M_x)(t)|\le|\ln(M_{x_k})(T)-\ln(M_x)(T)|\ . \tag{16}$$

由 (15) 和 (16) 易证 $\lim_{k\to\infty}\|M_{x_k}-M_x\|=0$. 故 M 连续.

由 Schauder 不动点定理可知 M 在 S 中有不动点 $x(t)$. 它是 (2) 的一个最终正解. 因 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$, 由引理 1 易知 $x(t)\in S(0,0,0)$. 证毕

定理 3 设 (3) 和 (a) 成立, $\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^m c_i(t)=c$ $(0\le c<1)$, 则 (2) 存在非振动解 $x(t)\in S(b,a,0)$ $(b\ne 0,\ a\ne 0)$ 的充分必要条件是

$$\int^\infty u\left|\sum_{j=1}^n f_j(u,b_1,\cdots,b_1)\right|du<\infty \text{ 对某个 } b_1\ne 0\ . \tag{17}$$

证明 仍使用定理 2 证明中的简记符号. 不失一般性, 设 $x(t)\in S(b,a,0)$ 为 (2) 的最终正解. 由定理 1 知 $b>0,\ a>0$. 由 (2) 易得

$$y(t)=y(T)+\int_T^t(u-T)f(u,x(g(u)))du+\int_t^\infty(t-T)f(u,x(g(u)))du\ , \tag{18}$$

取 T 充分大使 $x(g_{j_h}(u))\ge b_1=\frac{b}{2}$ $(j\in I_n,\ h\in I_l)$. 由 (a) 和 (18) 易得

$$\int_T^\infty(u-T)\sum_{j=1}^n f_j(u,b_1,\cdots,b_1)du\le a-y(T)<\infty\ .$$

由上式可推得 (17) 成立, 类似可证 $x(t)$ 为最终负解的情况. 下证充分性. 不妨设 $b_1>0$. 取正常数 A 使 $0<A<(1-c)b_1$. 因 (17) 成立, 可取 T 充分大使当 $t\ge T$ 时有

$$\frac{A}{b_1}+\sum_{i=1}^m c_i(t)+\frac{1}{b_1}\int_T^\infty u\sum_{j=1}^n f_j(u,b_1,\cdots,b_1)du\le 1\ . \tag{19}$$

定义映射如下:

$$(M_x)(t)=\begin{cases} A+\sum_{i=1}^m c_i(t)x(t-r_i) \qquad +\int_T^t uf(u,x(g(u)))du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\int_t^\infty tf(u,x(g(u)))du, \quad t\ge T\ , \\ (M_x)(T), \quad t_0\le t<T\ . \end{cases} \tag{20}$$

令 $x_0(t)=0,\ x_k(t)=(M_{x_{k-1}})(t),\ t\ge t_0,\ k=1,2,\cdots$. 由 (a) 和数学归纳法易证 $0\le x_{k-1}(t)\le x_k(t),\ t\ge t_0$. 另一方面, $x_1(t)\le b_1,\ t\ge t_0$. 如设 $x_k(t)\le b_1,\ t\ge t_0$, 则当 $t\ge T$ 时, 利用 (19) 易得

$$x_{k+1}(t)\le\left[\frac{A}{b_1}+\sum_{i=1}^m c_i(t)+\frac{1}{b_1}\int_T^\infty u\sum_{j=1}^n f_j(u,b_1,\cdots,b_1)du\right]\le b_1\ .$$

由归纳法知 $x_k(t) \le b_1$, $t \ge t_0$, $k = 1, 2, \cdots$. 设 $\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t) \le b_1$. 由 Lebesgue 收敛定理，在 $x_k(t) = (M_{x_{k-1}})(t)$ 中令 $k \to \infty$, 便得 $x(t) = (M_x)(t)$. 易知 $x(t)$ 是 (2) 的一个正解. 因 $A \le x(t) \le b_1$, 由定理 1 知 $x(t) \in S(b, a, 0)$. 类似可证 $b_1 < 0$ 的情况，证毕.

定理 4 设 (3) 和 (a) 成立， $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^m c_i(t) = c$ $(0 \le c < 1)$. 如果

$$\int^\infty \left| \sum_{j=1}^n f_j(u, d_1 g_{j_1}(u), \cdots, d_1 g_{j_l}(u)) \right| du < \infty \quad \text{对某个 } d_1 \ne 0 \ , \tag{21}$$

和

$$\int^\infty u \left| \sum_{j=1}^n f_j(u, b_1, \cdots, b_1) \right| du = \infty \quad \text{对某个 } b_1,\ b_1 d_1 > 0 \ , \tag{22}$$

成立，则 (2) 存在非振动解 $x(t) \in S(\infty, \infty, 0)$.

证明 不妨设 $d_1 > 0$, $b_1 > 0$. 再简记

$$f(u, g(u)z(g(u))) = \sum_{j=1}^n f_j(u, g_{j_1}(u) z(g_{j_1}(u)), \cdots, g_{j_l}(u) z(g_{j_l}(u))) \ ,$$

$$f(u, d_1 g(u)) = \sum_{j=1}^n f_j(u, d_1 g_{j_1}(u), \cdots, d_1 g_{j_l}(u)) \ .$$

取 T 充分大使当 $t \ge T$ 时,

$$\frac{b_1}{t d_1} + \sum_{i=1}^m c_i(t) + \frac{1}{d_1} \int_T^\infty f(u, d_1 g(u)) du < 1 \ . \tag{23}$$

定义映射:

$$(M_z)(t) = \begin{cases} \frac{b_1}{t} + \sum_{i=1}^m c_i(t) \dfrac{t - r_i}{t} z(t - r_i) \quad + \frac{1}{t} \displaystyle\int_T^t u f(u, g(u) z(g(u))) du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_t^\infty f(u, g(u) z(g(u))) du, \quad t \ge T \ . \\ (M_z)(T), \quad t_0 \le t < T \ . \end{cases} \tag{24}$$

令 $z_0(t) = 0$, $z_k(t) = (M_{z_{k-1}})(t)$, $t \ge t_0$, $k = 1, 2, \cdots$. 类似定理 3 易证 $\lim_{k\to\infty} z_k(t) = z(t) \le d_1$. 令 $x(t) = t z(t)$, 则 $x(t)$ 为 (2) 的正解且 $x(t) \in S(\infty, \infty, 0)$. 证毕.

定理 5 设 (3) 和 (2) 成立， $\lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^m c_i(t) = c$ $(0 \le c < 1)$, 则 (2) 存在非振动解 $x(t) \in S(\infty, \infty, d)$ $(d \ne 0)$ 的充分必要条件是

$$\int^\infty \left| \sum_{j=1}^n f_j(u, d_1 g_{j_1}(u), \cdots, d_1 g_{j_l}(u)) \right| du < \infty \quad \text{对某个 } d_1 \ne 0 \ . \tag{25}$$

证明 利用引理 2 易证必要性. 下证充分性. 不妨设 (25) 中的 $d_1 > 0$. 取 $H > 1$, $d > 0$ 使 $\frac{Hd}{1-c} \le d_1$. 取充分大的 T 使 $t \ge T$ 时

$$\frac{1-c}{H} + \sum_{i=1}^m c_i(t) + \frac{1-c}{Hd} \int_T^\infty f(u, d_1 g(u)) du < 1 \ ,$$

定义映射

$$(M_z)(t) = \begin{cases} d + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i(t)\frac{t-r_i}{t}z(t-r_i) + \frac{1}{t}\int_T^t uf(u,g(u)z(g(u)))du \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \displaystyle\int_t^{\infty} f(u,g(u)z(g(u)))du, \quad t \geq T \\ (M_z)(T), \quad t_0 \leq t < T\ . \end{cases}$$

令 $z_0(t)=0,\ z_k(t)=(M_{z_{k-1}})(t),\ k=1,2,\cdots$. 其余类似定理 4 的证明. 证毕.

§3. 例子

例 1 取 $K_1=1,\ K_2=\frac{1}{4}$, 则方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{4}x(t-1)-\frac{1}{4}x(t-2)\right]'' + \frac{1}{t}x^5\left(t-\frac{4}{5}\right)=0, \quad t \geq t_0 > 0\ , \tag{26}$$

满足定理 2 的条件, 故存在非振动解 $x(t) \in S(0,0,0)$.

例 2 考虑方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{3}|\sin t|x(t-r_1)-\frac{1}{3}(1-|\sin t|)x(t-r_2)\right]'' + \frac{1}{t^3}x^3(g(t))=0\ , \tag{27}$$

其中 $t \geq t_0 > 0,\ g(t) \in C[t_0,\infty),\ \lim_{t\to\infty} g(t)=\infty,\ r_1>0,\ r_2>0$. (27) 满足定理 3 的条件, 故存在非振动解 $x(t) \in S(b,a,0)$.

例 3 考虑方程

$$\left[x(t)-\sum_{i=1}^{m}c_i x(t-r_i)\right]'' + \frac{1}{t^2}x^{\frac{1}{3}}(t-\sigma)=0, \quad t \geq t_0 > 0\ , \tag{28}$$

其中 $c_i,\ r_i$ 均为正常数且 $\sum_{i=1}^{m} c_i < 1$, σ 为常数. 取 $d_1=b_1=1$, 则 (28) 满足定理 4 和 5 的条件, 故既存在非振动解 $x(t) \in S(\infty,\infty,0)$ 也存在非振动解 $x(t) \in S(\infty,\infty,d)$.

注 方程 (1) 是方程 (2) 的特殊情况, 所以 [3] 中的非振动解存在定理可作为本文的定理 3–5 的推论得出. 本文的结果也回答了 [4] 提出的一个问题.

参 考 文 献

[1] Kusano, T. and Onose, H., Nonlinear oscillation of second order functional differential equations with advanced argument, *J. Math. Soc. Japan*,**29** (1977), 541–559.

[2] 温立志，二阶泛函微分方程的渐近性和振动性，中国科学 A 辑， **2** (1986), 149–161.

[3] 阮炯，二阶中立型线性微分差分方程非振动解的类型与判别，数学年刊， **8A:1** (1987), 114–124.

[4] 张炳根，二阶中立型微分方程解的振动性，科学通报， **34:8** (1989), 563–566.

[5] 列维坦， B.M., (余家荣，张延昌译) 概周期函数，高等教育出版社，上海， 1956, 162–164.