

交换环的亚序与实位

戴执中

(江西大学数学系, 南昌 330047)

摘 要

本文在带有么元的交换环上, 引入了位和赋值与亚序间的相容性概念, 并给出一些性质. 在此基础上, 对环的实位与实赋值进行了刻划, 从而推广了实域理论中许多有关的结论.

本文是 [3] 的继续.

关键词: 亚序、相容性、(环的) 实位、实赋值

亚序与位和赋值间的关系, 在域的情形, 前人已有许多研究, 见 [4], [5], 以及在该处所列举的文献, 但对于交换环来说, 这方面的探讨尚未见于文献. 本文是作者文 [3] 的继续, 旨在对交换环来讨论亚序与位和赋值间的关系, 主要是它们间的相容性, 并进而对环的实位和实赋值作出刻划, 这就使得实域论中的一些结果能在交换环上来建立. 在符号的使用上, 除作个别的更改外, 大部分沿用 [3] 中的用法. 今后, 将以 R 记带有么元 1 的交换环; 以 (A, M) 记 R 的一个位, φ 记 R 的一个 Manis 赋值 (以下简称赋值), 它的值群 Γ 是个乘法群**. 当 $A = R$ 时, 就称 (A, M) 是 R 的一个浅显位; 当 $\Gamma = \{1\}$ 时, 称 φ 为 R 的一个浅显赋值. 今后如不特别声明, 我们所说的位和赋值都是非浅显的, 即 $A \neq R$; 以及 $\Gamma \neq \{1\}$. S 记 R 的一个亚序, \leq_S 是 S 所确定的亚序关系. 当 S 给定后, 以 (R, S) 记亚序环. R 的序 T , 如果满足 $T \supseteq S$, 就称它是 (R, S) 的一个序.

(一)

首先给出以下的定义:

定义 1 设 (A, M) 是 R 的一个位, $a, b \in R$. 若由 $0 \leq_S a \leq_S b \in A$ 可以导致 $a \in A$, 则称 (A, M) 与 S 是相容的, 或者说, (A, M) 是个 S -相容的位.

定义 2 设 φ 的 R 的一个赋值, $a, b \in R$. 若由 $0 \leq_S a \leq_S b$ 可以导致 $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, 则称 φ 与 S 是相容的, 或者说, φ 是个 S -相容的赋值.

1991 年 3 月 13 日收到.

** Γ 的单位元记作 1, 外加符号记作 0; 它们分别 R 的么元和零元记法相同, 但从意义上可以明辨其从属, 故不致引起误解.

今有下面的引理:

引理 1 若 (A, M) 是 R 的一个 S -相容的位, 则有 $\text{supp } S \subseteq A$.

证明 首先, 对于任何一个亚序 S , 总有 $0 \leq_S 1$. 若 $x \in \text{supp } S$, 则 $0 \leq_S 1+x \leq_S 1$. 按所设, 由 $1 \in A$, 可得 $1+x \in A$, 从而 $x \in A$. 因此有 $\text{supp } S \subseteq A$.

以下用 I 记 $\varphi^{-1}(0)$. 它既是 A 中的素理想, 同时又是 R 的一个素理想.

引理 2 若 φ 是 R 的一个 S -相容的赋值, 则有 $\text{supp } S \subseteq I$.

证明 若 $x \in \text{supp } S$, 由 $0 \leq_S 1+x \leq_S 1$, 按所设, 有 $\varphi(1+x) \leq \varphi(1) = 1$, 从而 $\varphi(x) \leq 1$. 若 $\varphi(x) = 1$, 取 $y \in R$, 使得 $\varphi(y) > 1$. 由于 $y^2 \in S$, 故 $xy^2 \in \text{supp } S$. 按前面所证, 应有 $\varphi(xy^2) = \varphi(y^2) \leq 1$, 而与 y 的取法矛盾. 因此应有 $\varphi(x) < 1$. 今假设 $\varphi(x) \neq 0$, 此时可取 $y \in R$, 使得 $\varphi(xy) = 1$. 于是有 $\varphi(y) > 1$. 又从 $y^2 \in S$ 可得 $x^2y^2 \in \text{supp } S$. 如前面所证, 应有 $\varphi(x^2y^2) < 1$, 这与 $\varphi(x^2y^2) = (\varphi(xy))^2 = 1$ 相矛盾. 因此只能有 $\varphi(x) = 0$, 即 $x \in I$, 从而 $\text{supp } S \subseteq I$.

命题 1 设 (A, M) 是 R 的一个位, φ 是由 (A, M) 所确定的赋值. 于是, 对于 R 的任何一个亚序 S , 以下诸论断是等价的:

- i) (A, M) 与 S 是相容的;
- ii) 对于 $a, b \in R$, 则 $0 \leq_S a \leq_S b \in M$ 可以导致 $a \in M$;
- iii) φ 与 S 是相容的.

证明 先来证 i) 与 iii) 的等价性.

设 i) 成立. 如果 iii) 不成立, 则对于某两个 $a, b \in R$, 有

$$0 \leq_S a \leq_S b \quad \text{与} \quad \varphi(a) > \varphi(b)$$

同时成立. 取 $c \in R$, 使得 $\varphi(bc) = 1$, 于是 $\varphi(ac) > 1$. 另一方面, 从 $0 \leq_S a \leq_S b$ 有 $0 \leq_S a^2 \leq_S b^2$, 以及 $0 \leq_S a^2c^2 \leq_S b^2c^2$. 如果 $0 \leq_S a^2c^2$, 则由 $\varphi(b^2c^2) = (\varphi(bc))^2 = 1$ 可得 $b^2c^2 \in A$, 从而 $a^2c^2 \in A$. 但这与 $\varphi(a^2c^2) = (\varphi(ac))^2 > 1$ 矛盾. 若出现 $0 \leq_S a^2c^2$, 从引理 1 得到 $a^2c^2 \in A$, 即 $\varphi(a^2c^2) \leq 1$, 矛盾. 因此 iii) 成立.

设 iii) 成立. 由 $0 \leq_S a \leq_S b \in A$, 有 $\varphi(a) \leq \varphi(b) \leq 1$, 即 $\varphi(a) \leq 1$, 因此 $a \in A$, 即 i) 成立.

如果不存在 $0 \leq_S b \in M$, 则 ii) 是空的, 此时只剩有 i) 与 iii) 等价性. 今设存在 $0 \leq_S b \in M$, 且有 ii) 成立. 易知, 此时有 $\text{supp } S \subseteq M$.

ii) \Rightarrow iii). 若由某个 $0 \leq_S a \leq_S b$ 得到 $\varphi(a) > \varphi(b)$, 可取 $c \in R$, 使得 $\varphi(ac) = 1$, 从而 $\varphi(bc) < 1$, 即 $bc \in M$. 今有 $0 \leq_S a^2c^2 \leq_S b^2c^2 \in M$. 无论出现 $0 \leq_S a^2c^2$, 或 $0 \leq_S a^2c^2$, 都将导致 $a^2c^2 \in M$. 但这与 $\varphi(a^2c^2) = (\varphi(ac))^2 = 1$ 相矛盾. 因此 iii) 成立.

iii) \Rightarrow ii). 设 $0 \leq_S a \leq_S b \in M$. 由于 iii) 与 i) 等价, 故有 $a \in A$. 若 $a \in A \setminus M$, 即 $\varphi(a) = 1$, 此时有 $\varphi(a) \leq \varphi(b)$, 即 $\varphi(b) \geq 1$, $b \notin M$, 矛盾!

推论 在命题的所设下, 若 (A, M) 与 S 是相容的, 则有 $\text{supp } S \subseteq M$.

证明 由命题, 此时 φ 与 S 也是相容的. 由引理 2 结合 $I \subseteq M$ 即得.

根据上述命题, 当 φ 是由 (A, M) 所确定的赋值时, 它们的 S -相容性是一致的. 由于这一事实, 在以下的论证中, 为了方便, 我们不时交互使用位和由它所定出的赋值.

命题 2 (A, M) 成为 S -相容的位, 当且仅当有等式

$$(((A \setminus M) \cap S) + M) \cap (-S) = \emptyset \quad (1)$$

成立.

证明 设 (A, M) 是个 S -相容的位. 如果 (1) 不成立, 则有 $a \in (A \setminus M) \cap S$, 以及 $b \in M$, 使得

$$a + b \in -S$$

上式又可写为 $a \leq_{\bar{S}} -b$. 根据命题 1 的推论, 此时 $a \leq_{\bar{S}} 0$. 故有

$$a \leq_{\bar{S}} a \leq_{\bar{S}} -b \in M.$$

因此, 按命题 1, 应有 $a \in M$, 矛盾.

现在设 (1) 成立. 假若 (A, M) 不是 S -相容的, 则存在 $a, b \in R$, 使得有 $0 \leq_{\bar{S}} a \leq_{\bar{S}} b \in A$, 但 $a \notin A$, 据 [6] 的命题 1, 有 $c \in M$, 使得 $ac \in A \setminus M$. 此时 $c \notin I$, 故按引理 2 应有 $c^2 \leq_{\bar{S}} 0$. 从而 $a^2c^2 \in (A \setminus M) \cap S$, 以及

$$a^2c^2 - b^2c^2 \in ((A \setminus M) \cap S) + M.$$

但另一方面, 由 $0 \leq_{\bar{S}} a^2c^2 \leq_{\bar{S}} b^2c^2$ 可得 $a^2c^2 - b^2c^2 \in -S$, 从而导致 $a^2c^2 - b^2c^2 \in (((A \setminus M) \cap S) + M) \cap (-S)$, 矛盾. 因此, (A, M) 与 S 是相容的.

命题 3 设 (A, M) 是环 (R, S) 的一个位. 在 A/M 上今按如下的方式规定一个子集 \bar{S} :

$$\begin{cases} \bar{0} = M \in \bar{S}; \\ \bar{0} \neq \bar{a} \in \bar{S} \quad \text{当且仅当有 } a \in (A \setminus M) \cap S, \text{ 使得 } \bar{a} = a + M. \end{cases}$$

于是, (A, M) 与 S 是相容的, 当且仅当 \bar{S} 是 A/M 的一个亚序, 并且 $\text{supp } \bar{S} = \{\bar{0}\}$.

证明 设 (A, M) 与 S 是相容的. 首先来证 \bar{S} 是 A/M 的一个亚序. 条件 $\bar{S} + \bar{S} \subseteq \bar{S}$; $\bar{S} \cdot \bar{S} \subseteq \bar{S}$, 以及 \bar{S} 包含 A/M 中所有的平方和, 都是显然满足的. 只需难验证 $-\bar{1} \notin \bar{S}$. 因若 $-\bar{1} = \bar{a} \in \bar{S}$, 则有 $-1 = a + m$, 其中 $a \in (A \setminus M) \cap S$, $m \in M$. 从而有 $-m = 1 + a \in S$. 因此

$$0 \leq_{\bar{S}} 1 \leq_{\bar{S}} 1 + a = -m \in M.$$

按所设以及命题 1, 有 $1 \in M$, 矛盾. 这示明了 $-\bar{1} \notin \bar{S}$, 故 \bar{S} 是 A/M 的亚序. 其次来考察 \bar{S} 的支集 $\text{supp } \bar{S}$. 若有 $\bar{0} \neq \bar{a} \in \bar{S} \cap -\bar{S}$, 即 $\bar{a} = a + M = b + M$, 其中 $a \in (A \setminus M) \cap S$, $b \in (A \setminus M) \cap -S$, 则由 $a = b + m$, $m \in M$, 可得 $m - a = -b \in S$. 此时 $0 \leq_{\bar{S}} a \leq_{\bar{S}} m \in M$. 按所设和命题 1, 即得 $a \in M$, 矛盾. 因此只能有 $\bar{a} = \bar{0}$, 即 $\text{supp } \bar{S} = \{\bar{0}\}$.

反之, 设 \overline{S} 是 A/M 的亚序, 且 $\text{supp } \overline{S} = \{\overline{0}\}$. 如果 (A, M) 与 S 不是相容的, 由命题 2, 应有 $b \in (A \setminus M) \cap S$, 以及 $m \in M$, 使得 $b + m \in -S$. 于是, $\bar{b} = b + M \in \overline{S} \cap -\overline{S} = \text{supp } \overline{S}$. 据所设, 应有 $\bar{b} = \overline{0}$, 从而 $b \in M$, 矛盾.

附注 当 S 取 R 的序 T 时, 命题的结论同样成立, 即 (A, M) 与序 T 成为相容的, 当且仅当 \overline{T} 是 A/M 的序, 而且 $\text{supp } \overline{T} = \{\overline{0}\}$. 由于 A/M 是整环, 此时 $\{\overline{0}\}$ 是素理想, 满足序的要求 (又可见 [3] 的命题 6).

由于 A/M 是整环, 其中支集为 $\{\overline{0}\}$ 的亚序可以拓展成商域 $K = qf(A/M)$ 的一个亚序 (见 [2]), 从而得知 K 是个实域. 据 [3] 的定义 1, (A, M) 是 R 的一个实位, 故有

推论 若 (A, M) 与 R 的某个亚序是相容的, 则 (A, M) 是 R 的实位.

这个结论的逆理也是成立的, 从 [3] 的定理 2 可以认知. 但就亚序而论, 我们还可以给出一个有构造性的证明.

命题 4 设 R 有实位 (A, M) , P 是 A/M 的一个亚序, 它的支集为 $\text{supp } P = \{\overline{0}\}$. 于是

$$S = \left\{ \sum x_i^2 \varepsilon_i \mid x_i \in R; \varepsilon_i \in A, \bar{\varepsilon}_i >_{\overline{P}} \overline{0} \right\} \quad (2)$$

是 R 的一个与 (A, M) 相容的亚序.

证明 首先证明 S 是 R 的一个亚序. 从规定的方式, 显然有 $R^2 \subseteq S$; $S + S \subseteq S$; 以及 $S \cdot S \subseteq S$. 为了证明 $-1 \notin S$, 以及以后的需要, 我们先来证明一个事实: 若 $b \in S \cap A$, 则当 b 表以 (2) 的形式

$$b = y_1^2 \eta_1 + \cdots + y_m^2 \eta_m$$

时, 其中所有的 $y_i \in A$.

假若不然, 则有某些 $y_i \notin A$. 设 $y_1, \cdots, y_r \in R \setminus A$. 按 [6] 的命题 1, 存在某个 $b' \in M$, 使得 $b'y_1, \cdots, b'y_r \in A$, 且其中至少有一个 $\in A \setminus M$. 今以 b'^2 乘入 b 的表式, 得

$$b'^2 b = (b'y_1)^2 \eta_1 + \cdots + (b'y_m)^2 \eta_m.$$

取它在 A/M 上的象 (在自然同态下), 则有

$$\bar{0} = \overline{b'^2 b} = \overline{(b'y_1)^2} \bar{\eta}_1 + \overline{(b'y_r)^2} \bar{\eta}_r$$

等式右边按 (2) 的规定就为 $>_{\overline{P}} \overline{0}$, 矛盾.

现在来证 $-1 \notin S$. 因若不然, 则有

$$-1 = w_1^2 \alpha_1 + \cdots + w_n^2 \alpha_n.$$

按上面所证的事实, 每个 $w_i \in A$. 于是, 对上式取它在 A/M 中的象, 即导致矛盾. 因此 $-1 \notin S$, 从而 S 是 R 的一个亚序.

今考虑

$$0 <_{\overline{S}} a \leq_{\overline{S}} b \in A.$$

此时有 $b \in S \cap A$, $a \in S$, 以及 $b - a \in S$. 设 b 表如上段中的形式, 又设

$$a = z_1^2 \mu_1 + \cdots + z_l^2 \mu_l; \quad b - a = x_1^2 \varepsilon_1 + \cdots + x_n^2 \varepsilon_n.$$

于是

$$y_1^2 \eta_1 + \cdots + y_m^2 \eta_m = z_1^2 + \cdots + z_l^2 \mu_l + x_1^2 \varepsilon_1 + \cdots + x_n^2 \varepsilon_n.$$

如果 $a \in R \setminus A$, 则 $b - a \in R \setminus A$. 此时至少有一个 z_i , 和一个 $x_i \notin A$. 选取 $c \in M$, 使得每个 cz_i 和每个 cx_j 都属于 A , 而且至少有一个不属于 M . 以 c^2 乘入该等式的两边, 据上面的论证方式, 就导致一矛盾. 因此应有 $a \in A$. 这就证明了位 (A, M) 是与 S 相容的.

当 R 是域时, 易知 (2) 可以简化成

$$S = \left\{ x^2 \varepsilon \mid x \in R; \varepsilon \in A, \bar{\varepsilon} \geq_P \bar{0} \right\}. \quad (2')$$

此时 $-1 \notin S$ 显然成立, 但 $S + S \subseteq S$ 则需要验证. 由于 (A, M) 此时是域的赋值环, 不妨选取 $1 + x^2 \varepsilon$ 来考虑, 并且设 $x \in A$. 今有 $\mu = 1 + x^2 \varepsilon \in A$. 按 (2') 的规定, 有 $\bar{\mu} = \overline{1 + x^2 \varepsilon} \geq_P \bar{0}$, 故

$$1 + x^2 \varepsilon = 1^2 \mu \in S,$$

即 $S + S \subseteq S$.

这个命题结合命题 3 的推论即得

推论 1 R 的位 (A, M) 成为实位, 当且仅当它与 R 的某个亚序是相容的.

这个推论当然也可以从 [3] 的定理 2 得到. 此外, 从命题所作出的亚序 S , 经过 Zorn 引理的步骤, 可以得到 R 的序; 另一方面, 从 R 的任何一个序 T 出发, 在 $\text{supp } T \neq (0)$ 时, 按照 [8] 中所给出的方法, 可以作出 R 的一个实位; 而在 $\text{supp } T = (0)$ 的情形, 由于 $\text{supp } T$ 是素理想, 故 R 是整环, 而且 T 可以拓展为 $K = qf(R)$ 的序, 即 K 是实域, 从而 $(R, (0))$ 是 R 的浅显实位. 因此又有

推论 2 对于环 R , 下列二论断等价:

- i) R 在实位, 但可以是浅显的;
- ii) R 有序.

(二)

在进一步探讨亚序与位和赋值的相容性之前, 现在再给出一条引理:

引理 3 若 φ 是个与 S 相容的赋值, 则有

$$(((R \setminus I) \cap S) + I) \cap (-S) = \emptyset, \quad (3)$$

其中 $I = \varphi^{-1}(0)$.

证明 如果 (3) 不成立, 则有某个 $a \in R \setminus I$, 满足 $a \underset{S}{>} 0$; 以及 $d \in I$, 使得 $a + d \in -S$, 从而

$$0 \underset{S}{<} a \underset{S}{\leq} -d \in I.$$

设 (A, M) 是确定 φ 的位. 由 $I \subseteq M$, 以及命题 1, 应有 $a \in M$. 但 $a \notin I$, 故有 $0 \neq \varphi(a) < 1$. 取 $c \in R$, 使得 $\varphi(ac) = 1$. 由于 $c^2 \underset{S}{>} 0$, 故有

$$0 \underset{S}{\leq} a^2 c^2 \underset{S}{\leq} d^2 c^2 \in I.$$

但 $\varphi(d^2 c^2) = 0$; $\varphi(a^2 c^2) = 1$, 这与所设的 S -相容性相矛盾, 从而证明了 (3).

根据这个引理, 在 (A, M) 与 S 为相容的前设下, 我们可以仿照在命题 3 中所提供的方式, 在整环 $R_1 = R/I$ 上是作出一个亚序 S_1 . 不难验明, $(A/I, M/I)$ 是 R_1 的一个位; 由它所确定的赋值 φ_1 , 满足 $\varphi_1^{-1}(0) = \{\bar{0}\}$. 同时, $(A/I, M/I)$ 和 φ_1 分别是 S_1 -相容的位和赋值. 根据命题 3, S_1 又在 $A/I/M/I$ 上给出一个亚序 \bar{S}_1 . 由于 $A/I/M/I \simeq A/M$, 如果把它们作为等同, 即知 \bar{S}_1 同于 S 在 A/M 上依照命题 3 所给出的方式而定出的 \bar{S} .

在 (A, M) 和 φ 与 S 是相容的前设下, 根据引理 2, 在 $\text{supp } S \subseteq I \subseteq M$, 从而 $\text{supp } S_1 = \{\bar{0}\}$. 今以 F_1 记整环 R_1 的商域. 此时 S_1 可以拓展成 F_1 的一个亚序, 记作 S_1^* . 另一方面, φ_1 在 F_1 上有自然拓展 φ_1^* , 它是通常的域赋值. φ_1^* 的剩余域 $\bar{F}_1 \simeq K = qf(A/M)$. 现在把 \bar{F}_1 与 K 作为等同. \bar{S} 是 A/M 上支集为 $\{\bar{0}\}$ 的亚序, 因此可以拓展成 K 的一个亚序, 记作 \bar{S}^* . 由于 φ_1^* 与 S_1^* 是相容的, S_1^* 在剩余域 $\bar{F}_1 = K$ 上给出亚序 \bar{S}_1^* (依命题 3). 再按 $\bar{S}_1 = \bar{S}$, S_1^* 在 $\bar{F}_1 = K$ 上定出的 $\bar{S}_1^* = \bar{S}^*$.

按 Baer-Krull 定理, 由 \bar{F}_1 上包含 \bar{S}^* 的序, 可以得到 F_1 上包含 S_1^* , 而且与 φ_1^* 相容的序. 限制在 R_1 上, 即有包含 S_1 、且与 φ_1 相容的序 T_1 , 同时 $\text{supp } T_1 = \{\bar{0}\}$. 返回到 R 上, 我们来看 S_1 在自然同态 $\pi: R \rightarrow R_1$ 下的逆象 $S' = \pi^{-1}(S_1)$. 此时 $S' = S + I$ 是 R 的一个亚序, 并且在 $\text{supp } S' = I$. 同样可知 T_1 的逆象 $T = \pi^{-1}(T_1)$ 是 R 的一个序, 满足

$$T \supseteq S' \supseteq S,$$

换言之, T 是 (R, S) 的一个序. 至于 T 与 (A, M) 的相容性是不难验知的. 因为, 如果从不等式

$$0 \underset{T}{\leq} a \underset{T}{\leq} b \in M \text{ 不能得到 } a \in M, \text{ 则将有}$$

$$0 \underset{T_1}{>} \pi(a) \underset{T_1}{\leq} \pi(b) \in M/I, \text{ 与 } \pi(a) \notin M/I,$$

但这与以上的论断相矛盾.

上面的论证示明了

命题 5 设 (A, M) 是 R 的一个与 S 相容的位. 于是存在 (R, S) 的某个序 T , 使得 (A, M) 与 T 是相容的.

这个命题的逆理也是真确的, 即当 (A, M) 与 (R, S) 的某个序 T 为相容的时, (A, M) 与 S 也是相容的. 因为, 从 $0 \underset{S}{\leq} a \underset{S}{\leq} b \in A$ 可得到

$$0 \underset{T}{\leq} a \underset{T}{\leq} b \in A.$$

如果出现 $a \underset{T}{=} 0$, 则由命题 1 的推论, 应有

$$a \in \text{supp } T \subseteq M,$$

从而 $a \in A$. 至于 $a \geq_0$ 的情形, 自然有 $a \in A$. 因此得到

定理 1 (A, M) 与 R 的亚序 S 成为相容的, 当且仅当亚序环 (R, S) 中存在与 (A, M) 相容的序.

特别在 R 是域时, 这个定理的结论正是 [5] 中用作亚序与位和赋值的相容性的定义. 但本文的定义 1 和定义 2 更为自然.

在什么条件下, (A, M) 和 φ 与亚序环 (R, S) 的每个序都是相容的? 对此, 我们有

定理 2 位 (A, M) 以及由它所确定的赋值 φ , 与亚序环 (R, S) 的每个序都相容的充分必要条件, 是有以下的关系成立:

$$((A \setminus M)_{\cap} S) + M \subseteq \bigcap_T (T \setminus \text{supp } T), \quad (4)$$

其中 T 遍历 (R, S) 的所有的序.

证明 设 T 是 (R, S) 的任何一个序. 于是

$$((A \setminus M)_{\cap} S) + M \subseteq ((A \setminus M)_{\cap} T) + M.$$

按 [3] 的命题 6, (A, M) 与 T 是相容的, 当且仅当 $((A \setminus M)_{\cap} T) + M \subseteq T \setminus \text{supp } T$. 因此, 定理的必要性成立.

现在设 (4) 成立, T 是 (R, S) 的任何一个序. 若有 $((A \setminus M)_{\cap} T) + M \not\subseteq T \setminus \text{supp } T$, 则存在某个 $a \in (A \setminus M)_{\cap} T$; 以及 $b \in M$, 使得 $a + b \in -T$. 从而

$$a^2 + ab = a(a + b) \in T \cdot (-T) \subseteq -T.$$

但另一方面, $a^2 \in (A \setminus M)_{\cap} S$; $ab \in M$. 根据所设, 应有 $a^2 + ab \in T \setminus \text{supp } T$, 矛盾. 因此, (A, M) 和 φ 与 T 是相容的. 由 T 的任意性, 故定理成立.

在定理成立的情形下, 可以称 (A, M) 和 φ 与亚序 S 是全相容的, 特别在 R 是域时, (4) 可以演化成为更简单的形式:

$$1 + M \subseteq \dot{S} = S \setminus \{0\} \quad (4')$$

这就是 [5] 中的定理 3.1(1).

又有 S 取弱亚序 S_0 时, 定理演化成 [3] 中命题 6 的推论 2.

(三)

现在我们利用上面所获得的结果, 来对合成赋值进行探讨. 设 R 的赋值 φ, φ' 分别由位 $(A, M), (B, N)$ 所确定, 它们满足

$$A \subseteq B, \quad I \subseteq N \subseteq M,$$

其中 $I = \varphi^{-1}(0)$. 此时称 φ 优于 φ' . 与域的情形一样, φ 可以通过 φ' , 以及 B/N 上由位 $(A/N, M/N)$ 所确定的赋值 $\bar{\varphi}$ 来合成 (见 [6]). 令 Γ, Γ' 分别是 φ, φ' 的值群. 在 φ 优

于 φ' 的所设下, 存在从 Γ 到 Γ' 上的保序同态 λ , 使得 $\varphi' = \lambda \circ \varphi$. 从这一事实立即得知, 当 φ 与亚序 S 相容时, φ' 也与 S 相容. 现在我们进一步证明以下二命题:

命题 6 设 φ, φ' 是 R 的赋值, φ 优于 φ' ; 它们相应的位分别是 (A, M) 和 (B, N) . 又设 $\bar{\varphi}$ 是 B/N 上由 $(A/N, M/N)$ 所确定的赋值. 于是, φ 与亚序 S 成为相容的, 当且仅当

- (i) φ' 与 S 是相容的;
- (ii) $\bar{\varphi}$ 与 S 在 B/N 上按命题 3 所给的方式所规定的亚序 \bar{S} 是相容的.

证明 设 φ 与 S 是相容的. 首先, 如上面所指出, (i) 成立. 从而按命题 3 的方式在 B/N 上所定的 \bar{S} 是个亚序. 今考虑

$$\bar{0} \leq_{\bar{S}} \bar{a} \leq_{\bar{S}} \bar{b} \in A/N.$$

据命题 3, 有 $\bar{b} = b + N$, 其中 $b \in (A \setminus N) \cap S$. 如果 $\bar{a} = a + N$, $a \in (B \setminus N) \cap S$, 按 $\bar{b} - \bar{a} \geq_{\bar{S}} \bar{0}$, 则有

$$b - a + N = c + N, \quad c \in B \cap S.$$

因此, $b - a = c + n$, $n \in N$. 令 $b - n = b'$. 有 $b' \in A$, 以及 $b' - a \geq_{\bar{S}} 0$. 于是有

$$0 \leq_{\bar{S}} a \leq_{\bar{S}} b' \in A.$$

按所设, 应有 $a \in A$, 即 $\bar{a} \in A/N$. 这就证明了位 $(A/N, M/N)$ 与 \bar{S} 相容, 从而 $\bar{\varphi}$ 与 \bar{S} 是相容的.

反之, 设 $\varphi', \bar{\varphi}$ 分别与 S, \bar{S} 相容. 令

$$0 \leq_{\bar{S}} a \leq_{\bar{S}} b \in A. \quad (5)$$

首先有 $a \in B$. 作 $\bar{a} = a + N$, 故有 $\bar{a} \geq_{\bar{S}} \bar{0}$. 如果 $\bar{a} = \bar{0}$, 据命题 3, $\text{supp } \bar{S} = \{\bar{0}\}$, 故有 $a \in N$. 此时 $a \in A$, 从而结论成立. 今设 $a \notin N$, 即 $a \in (B \setminus N) \cap S$. 由于

$$\bar{0} \leq_{\bar{S}} \bar{a} \leq_{\bar{S}} \bar{b} \in A/N,$$

故有 $\bar{a} \in A/N$, 即 $\bar{a} = a + N = a' + N$, $a' \in (A \setminus N) \cap S$. 因此 $a = a' + n \in A$, 这表明了从 (5) 式总有 $a \in A$, 从而 (A, M) 以及 φ 与 S 是相容的.

最后, 对于全相容的情形, 我们可以证明如下的结论:

命题 7 在命题 6 的所设下, φ 与亚序 S 成为全相容的, 当且仅当

- (i) φ' 与 S 是全相容的;
- (ii) $\bar{\varphi}$ 与亚序环 $(B/N, \bar{S})$ 中所有支集为 $\{\bar{0}\}$ 的序都是相容的, 此处 \bar{S} 是 S 在 B/N 上按命题 3 的方式所定出的亚序.

证明 必要性 (i) 是显然成立的. 现在来证 (ii). 由于 (i) 成立, 按命题 3, S 在 B/N 上给出的亚序 \bar{S} 具有 $\text{supp } \bar{S} = \{\bar{0}\}$. 设 Q 是亚序环 $(B/N, \bar{S})$ 的一个序, 而且, $\text{supp } Q = \{\bar{0}\}$. 首先, Q 和 \bar{S} 都能拓展成商域 $K = qf(B/N)$ 上的序和亚序, 我们仍以 Q 和 \bar{S} 来记. 令 I' 为

φ' 的核 $\varphi'^{-1}(0)$. 显然有 $I \subset I' \subset N \subset M$. 从而 φ' 在 $R_1 = R/I'$ 上给出 φ'_1 , 再把它自然拓展到 $F_1 = qf(R_1)$, 仍记作 φ'_1 . 这是一个域赋值, 它的剩余域为 $qf(B/I'/N/I' \simeq qh(B/N) = K$. 我们把前者等同于 K . 作为域上的亚序、序和赋值, 按熟知的理论 (见 [4]), 知存在 F_1 的亚序 S_1 和序 T_1 , 满足 $T_1 \supset S_1$, 同时 T_1 与 φ'_1 是相容的, 而且又有 $\bar{T}_1 = Q$, $\bar{S}_1 = \bar{S}$.

然后返回到 R , 其过程如命题 5 的证明所示. 这就得到 R 的一个序 T , 满足 $\text{supp } T = I'$, $T \supset S$, 以及 $\bar{T} = Q$. 今考虑 B/N 上的不等式:

$$\bar{0} \underset{Q}{\leq} \bar{a} \underset{Q}{\leq} \bar{b} \in A/N,$$

其中 $\bar{a} = a + N$, $\bar{b} = b + N$, $b \in (A \setminus N) \cap T$. 由 $a \in (B \setminus N) \cap T$, 按 $\bar{b} - \bar{a} \underset{Q}{\geq} \bar{0}$, 有 $b - a + N = c + N$, $c \in B \cap T$. 从而 $b - a = c + n$, $n \in N$; 以及 $b' = b - n \in A$. 于是, 又有 $b' - a \underset{T}{\geq} 0$, 从而得到

$$0 \underset{T}{\leq} a \underset{T}{\leq} b' \in A.$$

据所设, (A, M) 与 T 是相容的, 故得到 $a \in A$. 因此, $\bar{a} \in A/N$. 这就证得了 $\bar{\varphi}$ 与 Q 的相容性, 即 (ii) 成立.

充分性. 设 (i) 和 (ii) 都成立. 今任取 (R, S) 中的序 T , 以及

$$0 \underset{T}{\leq} a \underset{T}{\leq} b \in A.$$

由于 (B, N) 与 T 是相容的, T 在 B/N 上按命题 3 的方式所定出的 \bar{T} 满足 $\text{supp } \bar{T} = \{\bar{0}\}$, 以及 $\bar{T} \supset \bar{S}$. 从以上的不等式, 首先有 $a \in B$. 作 $\bar{a} = a + N$. 于是, $\bar{a} \underset{\bar{T}}{\geq} \bar{0}$. 若 $\bar{a} \underset{\bar{T}}{=} \bar{0}$, 则 $a \in N \subset A$. 否则, 设 $\bar{a} \underset{\bar{T}}{\neq} \bar{0}$, 则 $a \notin N$. 此时, $a \in (B \setminus N) \cap T$. 从而有

$$\bar{0} \underset{\bar{T}}{\leq} \bar{a} \underset{\bar{T}}{\leq} \bar{b} \in A/N,$$

其中 $\bar{b} = b + N$. 据 (ii), 应有 $\bar{a} \in A/N$, 即

$$\bar{a} = a' + N, \quad a' \in A.$$

由 $a + N = a' + N$ 得 $a = a' + n'$, $n' \in N$. 因此, $a \in A$. 这证明了, 从 $0 \underset{T}{\leq} a \underset{T}{\leq} b \in A$ 可以导致 $a \in A$, 换言之, (A, M) 和 φ 与 T 是相容的. 由于 T 是 (R, S) 的任何一个序, 这就证明了 (A, M) , φ 与 S 是全相容的.

当 R 是域时, 命题有较简的形式 (参看 [1], 命题 1.17):

推论 设 R 是个域, 其他的符号具有命题中的意义. 于是, φ 与亚序 S 成为全相容的, 当且仅当

- (i) φ' 与 S 是全相容的;
- (ii) $\bar{\varphi}$ 与 \bar{S} 是全相容的, 此处 \bar{S} 是 S 在 φ' 的剩余域上所确定的亚序.

参 考 文 献

-
- [1] Brocker, L., Characterization of fans and hereditarily pythagorean fields, *Math. Z.*, **151** (1976), 149–163.
 - [2] Brumfiel, G.W., Partially ordered Rings and Semi-Algebraic Geometry, Cam. Univ. Press, 1979.
 - [3] Dai, Z. (戴执中), Real places and real valuations on a commutative ring (submitted to *Acta Math, Sinica*)
 - [4] Lam, T.Y., The Theory of Ordered Fields, Ring theory and algebra III, M. Dekker, 1980, 1–152.
 - [5] ———, Orderings, Valuations and quadratic forms, CBMS Lect. Notes Ser. 52, Amer. Math. Soc. 1983.
 - [6] Manis, M.E., Valuations on a commutative ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969) 193–198.
 - [7] Samuel, P., La notion de place dans un Anneau, *Bull. Soc. Math. Fr.* **85**, (1957), 123–133.
 - [8] 曾广兴, 环上实位的构造与拓展, *数学学报*, **34**:3 (1991), 343–351.