第 36 卷第 2 期　　数　学　学　报　　Vol.36, No.2
1993 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Mar., 1993

H- 空间内可极大化 H- 拟凹函数的存在定理*1

丁协平

(四川师范大学数学系，成都　610066)

摘　要

本文在 $H-$ 空间内证明了可极大化 $H-$ 拟凹函数的存在定理. 我们的定理改进和推广了 Fan, Simons 和 Bellenger 的相应结果，并且肯定地解答了由 Bellenger 提出的尚待解决的问题.

关键词: $H-$ 空间、 $H-$ 凸、 $H-$ 紧、 $H-$ 拟凹、 $H-KKM$ 映象.

一. 引言

Ky Fan[1] 首先在拓扑矢量空间的仿紧凸集 X 上证明了可极大化上半连续凹函数的存在定理. 由放松凹性为拟凹性并假设 X 是紧凸的， Simons[2] 也获得了与 Fan[1] 的定理 8 相同的结论. Bellenger[3] 同时推广了 Fan 和 Simons 的结果并提出了如下一个尚待解决的问题:

如果我们仅假设 X 是一非空凸空间，定理 1 是否仍然正确？

在本文中，我们将首先在 $H-$ 空间内证明一个 KKM 型定理，一个重合点定理和一个极小极大不等式. 这些定理改进和推广了 Bardaro 和 Ceppitelli[4]， Ben-El-Mechaiekh, Deguire 和 Granas[5], Browder[6], Ding 和 Tan[7], Ko 和 Tan[8], Lassonde[9], Park[10], Simons[11], 和 Takahashi[12] 等人的相应结果. 然后应用我们的极小极大不等式，我们证明了在 $H-$ 空间内极大化拟凹函数的一个存在性定理. 这些定理统一了 Fan[1], Simons[2] 和 Bellenger[3] 的相应结果并且肯定地解答了 Bellenger[3] 提出的尚待解决的问题.

二. KKM 型定理，重合点定理和极小极大不等式

设 X 是一非空集， 2^X 表示 X 的一切子集的族和 $\mathcal{F}(x)$ 表 X 的一切非空有限子集的族. 如果 D 是拓扑空间 Y 的一子集，称 D 是紧开 (闭) 的，如果对 Y 的每一非空紧子集 C, $D\cap C$ 在 C 中是开 (闭) 的. 设 $F: D\subset X\to 2^Y$ 是一映射，则我们定义映射 $F^{-1}: Y\to 2^D$ 如下：

$$F^{-1}(y)=\{x\in D:\ \ y\in F(x)\},\qquad \forall y\in Y.$$

* 1990 年 10 月 11 日收到， 1992 年 3 月 9 日收到此精简稿.
1 国家自然科学基金资助课题.

在 Horvath[13] 的工作启发下，Bardaro 和 Ceppitelli[14] 引入了如下概念.

称 $(X,\{F_A\})$ 为 $H-$ 空间，如果 X 是一拓扑空间和 $\{F_A\}$ 是由 $A\in\mathcal{F}(X)$ 标号的非空可缩子集族使得每当 $A,A'\in\mathcal{F}(X)$ 和 $A\subset A'$, 有 $F_A\subset F_{A'}$. 我们说 X 的子集 L 是:

(i) $H-$ 凸的，如果对每一 $A\in\mathcal{F}(L)$, $F_A\subset L$;

(ii) 弱 $H-$ 凸的，如果对每一 $A\in\mathcal{F}(L)$, $F_A\cap L$ 是一可缩集;

(iii) $H-$ 紧的，如果对每一 $B\in\mathcal{F}(X)$, 存在 X 的一紧弱 $H-$ 凸子集 L_B 使得 $L\cup B\subset L_B$.

称 $F:D\subset X\to 2^X$ 为 $H-KKM$ 映射，如果对每一 $A\in\mathcal{F}(D)$, $F_A\subset\cup_{x\in A}F(x)$.

下面引理是 Horvath[14] 的系 I.1 的轻微改进.

引理 2.1 设 D 是 $H-$ 空间 $(X,\{F_A\})$ 的非空子集，映射 $F:D\to 2^X$ 使得

(a) F 是 H-KKM 映射,

(b) 对每一 $x\in D$, $F(x)$ 是闭的且对某 $x_0\in D$, $F(x_0)$ 是紧的，则 $\cap_{x\in D}F(x)\neq\emptyset$.

定理 2.2 设 D 是 $H-$ 空间 $(X,\{F_A\})$ 的非空子集，Y 是拓扑空间和 $G:D\to 2^Y$ 使得

(a) 对每一 $x\in D$, $G(x)$ 是紧开的,

(b) 存在单值连续映射 $S:X\to Y$ 使得由 $T(x)=S^{-1}(G(x))$ 定义的映射 $T:D\to 2^X$ 是 $H-KKM$ 映射,

(c) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 Y 的紧子集 K 使得对每一 $B\in\mathcal{F}(D)$ 和对每一 $y\in S(L_B)\setminus K$, 存在 $x\in L_B\cap D$ 满足 $y\notin G(x)\cap S(L_B)$. 则 $K\cap\cap_{x\in X}G(x)\neq\emptyset$.

证明 对每一 $x\in D$, 令 $G_1(x)=G(x)\cap K$, 则 $G_1(x)$ 是 K 的闭子集. 我们将证明族 $\{G_1(x):x\in D\}$ 有有限交性质. 因为 L 是 $H-$ 紧的，对每一 $B\in\mathcal{F}(D)$, L_B 是 X 的紧弱 $H-$ 凸子集且 $L\cup B\subset L_B$ 使得对每一 $y\in S(L_B)\setminus K$, 存在 $x\in L_B\cap D$ 满足 $y\notin G(x)\cap S(L_B)$. 现在我们定义映射 $F:D\cap L_B\to 2^{L_B}$ 如下:

$$F(x)=T(x)\cap L_B=S^{-1}(G(x))\cap L_B,\quad \forall x\in D\cap L_B,$$

则我们有下列性质:

(1) 由 L_B 的弱 $H-$ 凸性，$(L_B,\{F_A\cap L_B\})$ 是一 $H-$ 空间,

(2) 对每一 $A\in\mathcal{F}(D\cap L_B)\subset\mathcal{F}(D)$, $F_A\subset\cup_{x\in A}T(x)$, 且因此 $F_A\cap L_B\subset\cap_{x\in A}(T(x)\cap L_B)=\cup_{x\in A}F(x)$. 故 F 是 $H-KKM$ 映射.

(3) 因 S 连续和 L_B 是 X 的紧子集，$S(L_B)$ 是 Y 的一紧子集. 因此 $G(x)\cap S(L_B)$ 在 $S(L_B)$ 中是闭的. 由 S 的连续性，$S^{-1}(G(x)\cap S(L_B))$ 是 D 的闭子集. 由此推得对每一 $x\in D\cap L_B$,

$$F(x)=S^{-1}(G(x))\cap L_B=S^{-1}(G(x)\cap S(L_B))\cap L_B$$

是 L_B 的一紧子集.

由引理 2.1, $\cap_{x\in D\cap L_B}F(x)\neq\phi$. 任取 $y\in\cap_{x\in D\cap L_B}F(x)$, 我们有

$$S(y)\in\bigcap_{x\in D\cap L_B}(G(x)\cap S(L_B)).$$

由假设 (c), 我们必有

$$\begin{aligned}S(y)\in\bigcap_{x\in D\cap L_B}(G(x)\cap S(L_B))&\subset\bigcap_{x\in D\cap L_B}(G(x)\cap K)\\&\subset\bigcap_{x\in B}(G(x)\cap K)=\bigcap_{x\in B}G_1(x).\end{aligned}$$

这就证明了族 $\{G_1(x) : x \in D\}$ 有有限交性质．由 K 的紧性，$\cap_{x\in D}G_1(x) \neq \phi$, 即是 $K \cap \cap_{x\in D}G(x) \neq \phi$.

注 2.1 容易看出条件 (c) 等价于下面条件：

(c_1) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 Y 的紧子集 K 使得对每一 $B \in \mathcal{F}(D)$,

$$\bigcap_{x\in D\cap L_B} (G(x) \cap S(L_B)) \subset K.$$

因此定理 2.2 推广了 Bardaro 和 Ceppitelli 在 [13,15] 中的定理 1. 我们也注意到在条件 (a) 下，条件 (c_1) 被下列条件蕴含：存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 使得 $\cap_{x\in D\cap L}G(x)$ 是 Y 的紧子集. 因为每一个由 Lassonde[9] 引入的凸空间都是 $H-$ 空间，定理 2.2 也在更弱的假设下推广了 Lassonda[9] 的定理 I 和 Park[10] 的定理 6 到 $H-$ 空间.

定理 2.3 设 D 是 $H-$ 空间 $(X, \{F_A\})$ 的非空子集，Y 是拓扑空间和 $A, B : D \to 2^Y$ 使得

(a) 对每一 $y \in Y$, $B^{-1}(y) \neq \phi$ 和对每一 $E \in \mathcal{F}(B^{-1}(y))$, $F_E \subset A^{-1}(y)$,

(b) 对每一 $x \in D$, $B(x)$ 在 Y 中是紧开的,

(c) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 Y 的紧子集 K 使得对每一 $B \in \mathcal{F}(D)$ 和每一 $y \in Y \setminus K$, 存在 $x \in D \cap L_B$ 满足 $y \in B(x)$, 则对任何单值连续映射 $S : X \to Y$, 存在 $x_0 \in D$ 使得 $S(x_0) \in A(x_0)$.

证明 定义映射 $G : D \to 2^Y$ 如下：

$$G(x) = Y \setminus B(x), \qquad \forall x \in D.$$

对任给单值连续映射 $S : X \to Y$, 定义映射 $F : D \to 2^X$ 如下：

$$F(x) = S^{-1}(G(x)), \qquad \forall x \in D.$$

如果 F 是 $H-KKM$ 映射，由条件 (b) 和 (c), 容易验证定理 2.2 的一切条件将被满足．因此

$$\bigcap_{x\in D} G(x) = \bigcap_{x\in D} (Y \setminus B(x)) = Y \setminus \bigcup_{x\in D} B(x) \neq \phi.$$

但条件 (a) 蕴含 $Y = \cup_{x\in D}B(x)$, 我们得到矛盾, 因此 F 不是 $H-KKM$ 映射和存在 $E \in \mathcal{F}(D)$ 和 $x_0 \in F_E$ 使得 $x_0 \notin \cup_{x\in E}F(x) = \cup_{x\in E}S^{-1}(G(x))$. 由此推得

$$S(x_0) \notin \bigcup_{x\in E} G(x) = \bigcup_{x\in E} (Y \setminus B(x)).$$

因此 $S(x_0) \in B(x)$, $\forall x \in E$ 和 $E \subset \mathcal{F}(B^{-1}(S(x_0)))$. 由 (a), $F_E \subset A^{-1}(S(x_0))$ 且因此 $x_0 \in A^{-1}(S(x_0))$ 和 $S(x_0) \in A(x_0)$.

注 2.2 定理 2.3 改进和推广了 Bardaro 和 Ceppitelli [4, 定理 1], Ben-El-Mechaiekh, Deguire 和 Granas [5, 定理 1], Browder [6, 定理 1], Fan [16, 引理 4; 17, 定理 2], Ko 和 Tan [8, 定理 3.1], Lassonde [9, 定理 1.1], Park [10, 定理 6], Simons [11, 定理 4.3] 和 Takahashi [12, 定理 2 和 5].

下面结果是定理 2.3 的等价陈述.

定理 2.4 设 D 是 $H-$ 空间 $(X,\{F_A\})$ 的非空子集，Y 是拓扑空间和 Z 是任意集. 令 $M,N\subset Z$ 和 $f,g:D\times Y\to Z$ 是两个映射使得

(a) 对每一 $y\in Y$, 集 $\{x\in D:f(x,y)\in M\}$ 非空和对每一 $E\in\mathcal{F}(\{x\in D:f(x,y)\in M\})$, $F_E\subset\{x\in D:g(x,y)\in N\}$.

(b) 对每一 $x\in D$, 集 $\{y\in Y:f(x,y)\in M\}$ 是紧开的.

(c) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 Y 的紧子集 K 使得对每一 $B\in\mathcal{F}(D)$ 和对每一 $y\in Y\setminus K$, 存在 $x\in D\cap L_B$ 满足 $f(x,y)\in M$, 则对任何单值连续映射 $S:X\to Y$, 存在 $x_0\in D$ 使得 $g(x_0,S(x_0))\in N$.

注 2.3 定理 2.4 推广了 Bardaro-Ceppitelli [4], Browder [6], Lassonde [9], Yu [18] 和 Fan [17] 等人的相应结果.

下面有用的极小极大不等式是定理 2.4 的特殊情形.

定理 2.5 设 D 是 $H-$ 空间 $(X,\{F_A\})$ 的非空子集和 Y 是拓扑空间. 令 $f,g:D\times Y\to I\!R$ 是两个实值函数使得

(1) 存在单值连续映射 $S:X\to Y$ 使得对一切 $x\in D, g(x,S(x))\le 0$,

(2) 对每一 $x\in D$, 映射 $y\mapsto f(x,y)$ 在 Y 的每一紧子集上是下半连续的,

(3) 对每一 $y\in Y$ 和每一 $E\in\mathcal{F}(\{x\in D:f(x,y)>0\})$,

$$F_E\subset\{x\in D:g(x,y)>0\},$$

(4) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 Y 的紧子集 K 使得对每一 $B\in\mathcal{F}(D)$ 和对每一 $y\in Y\setminus K$, 存在 $x\in D\cap L_B$ 满足 $f(x,y)>0$.

则存在 $\hat{y}\in K$ 使得对一切 $x\in D,\ f(x,\hat{y})\le 0$.

注 2.4 定理 2.5 推广了 Ding–Tan[7], Shih–Tan[19], Fan[1,17], Tan[20] 和 Allen[21] 的相应结果.

三. 可极大化 H– 拟凹函数的存在性

设 D 是 $H-$ 空间 $(X,\{F_A\})$ 的一子集. 实值函数 $f:D\to I\!R$ 被说成是 $H-$ 拟凹的，如果对每一 $r\in I\!R$, 集 $\{x\in D:f(x)>r\}$ 是 $H-$ 凸的.

我们需要下面引理.

引理 3.1 令 X 是一正规空间，K 是 X 的闭子集和 U 是 X 的开子集. 假设 $\alpha:K\to[0,1]$ 是连续函数使得 supp $\alpha\subset U\cap K$. 则存在 α 的连续扩张 $\tilde{\alpha}:X\to[0,1]$ 使得 supp $\tilde{\alpha}\subset U$.

证明 因 X 是正规的，由 Tietze 扩张定理，我们有 α 的连续扩张 $\alpha_1:X\to[0,1]$. 因 supp $\alpha\subset U$, 我们能找到一开集 V 使得 supp $\alpha\subset V\subset\overline{V}\subset U$. 由 Uryshon 引理，存在连续函数 $\beta:X\to[0,1]$ 使得对一切 $x\in V$, $\beta(x)=1$ 和对一切 $x\in X\setminus U$, $\beta(x)=0$, 则 $\tilde{\alpha}(x)=\alpha_1(x)\cdot\beta(x)$ 所需要的 α 的扩张.

定理 3.2 令 $(X,\{F_A\})$ 是 Hausdorff $H-$ 空间和 $\hat{X}=\{f:X\to I\!R|\ f$ 是上半连续和 $H-$ 拟凹的 $\}$. 假设

(1) 对每一 $x\in X$, $G(x)$ 是 $\hat{X}$ 的一非空凸子集,

(2) 对每一 $f\in\hat{X}$, $G^{-1}(f)$ 在 X 内是紧开的,

(3) 存在 X 的 $H-$ 紧子集 L 和 X 的紧子集 K 使得对每一 $B \in \mathcal{F}(X)$, $z \in X \setminus K$ 和 $f \in G(z)$,

$$f(z) < \max\{f(x) : x \in L_B\},$$

则存在 $\hat{z} \in K$ 和 $\hat{f} \in G(\hat{z})$ 使得 $\hat{f}(\hat{z}) = \max\{\hat{f}(x) \ : x \in X\}$.

证明 因为对每一 $x \in X$, $G(x)$ 非空, 存在 $f_x \in \hat{X}$ 使得 $x \in G^{-1}(f_x)$. 由条件 (2)$\{G^{-1}(f_x) : x \in X\}$ 是 X 的一紧开覆盖. 因 K 是 X 的紧子集，存在有限个函数 $f_1, \cdots, f_n \in \hat{X}$ 使得 $K \subset \cup_{i=1}^{n} G^{-1}(f_i)$. 令 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ 是从属于 $\{G^{-1}(f_i) \cap K\}_{i=1}^{n}$ 的连续单位分解使得

(a) $\operatorname{supp}\ \alpha_i \subset G^{-1}(f_i) \cap K$ 和 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = 1$, $\forall x \in K$. 对每一 $x \in K$, 定义 $\varphi_x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) f_i$, 则我们有

(b) 对每一 $y \in X$, 函数 $x \to \varphi_x(y)$ 在 K 上连续,

(c) 函数 $x \mapsto \varphi_x(x)$ 在 K 上是上半连续的.

因为 L 是 $H-$ 紧的, 对每一 $B \in \mathcal{F}(X)$, 令 L_B 是满足 $L \cup B \subset L_B$ 的一紧弱 $H-$ 凸子集, 则 $(L_B, \{F_A \cap L_B\})$ 是一紧 $H-$ 空间. 由条件 (1) 和 (2), 我们有有限个函数 $f_{n+1}, \cdots, f_{n+k} \in \hat{X}$ 使得 $L_B \subset \cup_{j=1}^{k} G^{-1}(f_{n+j})$. 因 $L_B \cup K$ 是 Hausdorff 拓扑空间 X 的紧子集，故它是正规的. 现在从引理 3.1 推得对每一 $i = 1, \cdots, n$, 存在 α_i 的一连续扩张 $\tilde{\alpha}_i : L_B \cup K \to [0, 1]$ 使得

$$\operatorname{supp}\ \tilde{\alpha}_i \subset G^{-1}(f_i) \cap (L_B \cup K).$$

令 $L_1 = \{x \in L_B : \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i(x) = 0\}$ 和令 $U_{n+j} = G^{-1}(f_{n+j}) \cap (L_B \setminus K)$, $j = 1, \cdots, k$, 则 $L_1 \subset \cup_{j=1}^{k} U_{n+j}$. 因此我们有定义在 L_1 上的连续单位分解 $\{\alpha_{n+j}\}_{j=1}^{k}$ 满足

(d) $\operatorname{supp}\ \alpha_{n+j} \subset U_{n+j} \cap L_1$, $j = 1, \cdots, k$ 和对每一 $x \in L_1$, $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{n+j}(x) = 1$. 又由引理 3.1 对每一 $j = 1, \cdots, k$, 存在 α_{n+j} 的连续扩张 $\tilde{\alpha}_{n+j} : L_B \cup K \to [0, 1]$ 使得 $\operatorname{supp}\ \tilde{\alpha}_{n+j} \subset U_{n+j}$. 由 (a) 和 (d), 我们有 $\sum_{i=1}^{n+k} \tilde{\alpha}_i(x) \neq 0$, $\forall x \in L_B \cup K$. 现在对每一 $i = 1, \cdots, n+k$, 定义 $\beta_i : L_B \cup K \to [0, 1]$ 如下：

$$\beta_i(x) = \tilde{\alpha}_i(x) \Big/ \sum_{j=1}^{n+k} \tilde{\alpha}_j(x).$$

则连续函数 β_i, $i = 1, \cdots, n+k$ 满足：

(e) $\operatorname{supp}\ \beta_i \subset G^{-1}(f_i)$, $\forall i = 1, \cdots, n+k$,

(f) 对每一 $x \in K$, 当 $i = 1, \cdots, n$ 时 $\beta_i(x) = \alpha_i(x)$ 和当 $j = 1, \cdots, k$ 时 $\beta_{n+j}(x) = 0$,

(g) 对每一 $x \in L_B \cup K$, $\sum_{i=1}^{n+k} \beta_i(x) = 1$.

对每一 $x \in L_B$, 定义 $\tilde{\varphi}_x = \sum_{i=1}^{n+k} \beta_i(x) f_i$, 则由 (e),(g) 和条件 (1), 对每一 $x \in L_B$, $\tilde{\varphi}_x \in G(x)$ 且 $\tilde{\varphi}_x$ 是 X 上的上半连续 $H-$ 拟凹函数. 所以在 (b) 和 (c) 中，当 $\tilde{\varphi}_x$ 和 L_B 代替 φ_x 和 K 时， (b) 和 (c) 仍然成立. 注意到 (f) 蕴含对每一 $x \in L_B \cap K$, $\tilde{\varphi}_x = \varphi_x$.

现在对每一 $(x, z) \in L_B \times L_B$, 定义

$$g(x, z) = \tilde{\varphi}_z(x) - \tilde{\varphi}_z(z),$$

则函数 $g : L_B \times L_B \to I\!R$ 有下列性质：

(i) 对每一 $x \in L_B$, $g(x, x) = 0$,

(ii) 对每一 $x \in L_B$, 函数 $z \to g(x, z)$ 在 L_B 上是下半连续的,

(iii) 因为对每一 $z \in L_B$, $\tilde{\varphi}_z$ 是 $H-$ 拟凹的, 集 $\{x \in L_B : g(x,z) > 0\}$ 是 $H-$ 凸集.

注意到 $(L_B, \{F_A \cup L_B\})$ 是紧 $H-$ 空间, 从具有 $D = X = Y = L = K = L_B$, $f \equiv g$ 和 S 是恒等映射的定理 2.5 推得存在点 $\bar{z} \in L_B$ 使得 $g(x, \bar{z}) \leq 0$ 对一切 $x \in L_B$ 成立, 即有

(h) $\tilde{\varphi}_{\bar{z}}(x) \leq \tilde{\varphi}_{\bar{z}}(\bar{z}), \qquad \forall x \in L_B.$

现在对每一 $x \in X$, 令 $A(x) = \{z \in K : \varphi_z(x) \leq \varphi_z(z)\}$. 由 (h), 对每一 $B \in \mathcal{F}(X)$,

$$\bar{z} \in \bigcap_{x \in L_B} A(x) \subset \bigcap_{x \in B} A(x),$$

且因此族 $\{A(x) : x \in X\}$ 有有限交性质. 因为 K 是紧的, 我们必有 $\hat{z} \in \cap\{A(x) : x \in X\}$. 令 $\hat{f} = \varphi_{\hat{z}} \in G(\hat{z})$, 则

$$\hat{f}(\hat{z}) = \max\{\hat{f}(x) : x \in X\}.$$

定理证毕.

注 3.1 因为拓扑矢量空间的每一凸子集是 $H-$ 空间, 所以定理 3.2 改进和推广了 Bellenger[3] 的定理 1 且没有假设 X 是仿紧的. 因此定理 3.2 统一和推广了 Fan[1], Simons[2] 和 Bellenger[3] 的相应结果并且肯定地解答了 Bellenger[3] 提出的尚待解决的问题.

参 考 文 献

[1] Fan, Ky, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **226**(1984), 519–537.

[2] Simons, S., An existence theorem for quasiconcave functions with applications, *Nonlinear Anal. TMA*, **10**(1986), 1133–1152.

[3] Bellenger, J.C., Existence of maximizable quasiconcave functions on paracompact convex space, *J. Math. Anal. Appl.*, **123**(1987), 333–338.

[4] Bardaro, C. and Ceppitelli, R., Fixed point theorems and vector valued minimax theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **146**(1990), 363–373.

[5] Ben-El-Mechaiekh, H., Deguire, P. and Granas, A., Une alternative non linéaire en analyse convexe et applications, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **295**(1982), 257–259.

[6] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in toplogical vector spaces, *Math. Ann.*, **177**(1968), 283–301.

[7] Ding, X.P. and Tan, K.K., Generalized variational inequalities and generalized quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **148**(1990), 497–508.

[8] Ko, M.H. and Tan, K.K., A coincidence theorem with applications to minimax inequalities and fixed point theorems, *Tamkang J. Math.*, **17**(1986), 37–45.

[9] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, **97**(1983), 151–201.

[10] Park, S., Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141**(1989), 164–176.

[11] Simons, S., Two-function minimax theorems and variational inequalities for functions on compact and non-compact sets, with some comments on fixed-point theorems, *Proc. Symp. Pure Math.*, **45**(1986), 377–392.

[12] Takahashi, W., Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorem, *Proc. Symp. Pure Math.*, **45**(1986), 419–427.

[13] Bardaro, C. and Ceppitelli, R., Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132**(1988), 484–490.

[14] Horvath, C., Some resultes on multivalued mappings and inequalities without convexity, In Nonlinear and Convex Analysis; Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **107**(Ed. by Lin B. L. and Simons S.) Dekker, New York, 1987, 99–106.

[15] Bardaro, C. and Ceppitelli, R., Minimax inequalities in Riesz spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena,* **35**(1987), 63–70.

[16] Fan, Ky , A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.*, **142**(1961), 305–310.

[17] Fan, Ky , A minimax inequality and applications, In "Inequalities III" (Ed. O. Shisher) 103–113, Acad. Press, New York, 1972.

[18] 俞建， Fan Ky 引理的推广及其应用，应用数学学报， **11**(1988), 423–428.

[19] Shih, M.H. and Tan, K.K., A geometric property of convex set with applications to minimax type inequalities and fixed point theorems, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, **45**(1988), 169–183.

[20] Tan, K.K., Comparison theorems on minimax inequalities, variational inequalities, and fixed point theorems, *J. London Math. Soc.*, **28**(1983), 555–562.

[21] Allen, G., Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **58**(1977), 1–10.