第 36 卷第 2 期　　数　学　学　报　　Vol.36, No.2
1993 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Mar., 1993

高维正定核的本征值*

韩彦彬

(河北大学数学系，保定　071002)

摘　要

设 G 为 $\mathbb{R}_m$ 中的闭单位正方体，定义在 $G\times G$ 上的连续核 $K(x,y)$ 是对称正定的，$K_1(x,y)$ 是它的实部. 本文证明，如 $K_1(x,y)$ 的偏导数是连续的，则 $K(x,y)$ 的本征值为 $\lambda_n(K)=o(n^{-1-1/m})$; 如 $K_1(x,y)$ 满足 α 阶 Lipschitz 条件，则 $\lambda_n(K)=O(n^{-1-\alpha/m})$; 如 $K_1(x,y)$ 的偏导数满足 α 阶 Lip- 条件，则 $\lambda_n(K)=O(n^{-1-(1+\alpha)/m})$. 文 [3,4,5] 中有关定理，是上述结果在 $m=1$ 时的推论.

关键词：本征值、迹类算子、渐近性.

§1. 引言与记号

本文中用 G 表示 $\mathbb{R}^m$ 中的闭单位正方体 $[0,1]\times\cdots\times[0,1]$, G 中的点记为 $(x_1,\cdots,x_m)=x$. 我们说 $2m$ 个自变量的核 $K(x,y)\in L^2(G\times G)$ 是对称的，指对几乎所有 $x,y\in G$,

$$K(x,y)=\overline{K(y,x)}.$$

众所周知 [1], 这种核生成的积分算子 K：

$$Kf(x)=\int_G K(x,y)f(y)dy_1\cdots dy_m$$

是 $L^2(G)$ 中的紧对称算子，它有一个趋于零的实本征值列 $\{\lambda_n(K)\}$. 如果还假定核 $K(x,y)$ 是正定的，即对任何 $f\in L^2(G)$,

$$\iint\limits_{GG} K(x,y)f(y)\bar{f}(x)dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m\geq 0,$$

那么这些本征值都是正的. 长期以来，人们关心的是本征值列 $\{\lambda_n(K)\}$ 趋于零的速率. 在 $m=1$ 的简单情况，H.Weyl[2] 的一个著名结果是，如 $K(x,y)\in C^1([0,1]\times[0,1])$ 是对称的，则 $\lambda_n(K)=o(n^{-3/2})$, 后来 J.B.Reade[3] 改进了 H.Weyl 的结果，他证明，如果还假定 $K(x,y)$ 是正定的，则 $\lambda_n(K)=o(n^{-2})$. 在文 [4] 中 J.B.Reade 又给出，满足 α 阶 Lipschitz 条件的对

* 1990 年 8 月 13 日收到，1991 年 7 月 22 日收到修改稿.

称正定核 $K(x,y)$ 的本征值为 $\lambda_n(K)=O(n^{-1-\alpha})$. 最近 J.A.Cochran 和 M.A.Lukas[5] 证明，如对称正定核 $K(x,y)$ 的偏导数存在而且满足 α 阶 Lipschitz 条件，则 $\lambda_n(K)=O(n^{-2-\alpha})$. 文 [6,7] 讨论了 H^p 类正定核的性质及其本征值的渐近分布.

上述文 [2–7] 中的积分核都是 2 个自变量的，人们更希望知道积分核有 $2m$ 个自变量的情况. 本文讨论定义在 R^m 中的闭单位正方体 G 上的对称正定核的本征值的渐近分布. 文 [3,4,5] 中的有关定理，分别是本文定理 1,2,3 在 $m=1$ 时的推论.

§2. 辅助引理

我们知道 [1], Hilbert 空间 H 中的紧对称算子 T 叫做迹类的，指它的本征值列 $\{\lambda_n(T)\}$ 满足 $\sum_1^\infty |\lambda_n(T)|<\infty$, 这时 T 的迹范数与迹分别定义为：

$$||T||_{\rm tr}=\sum_1^\infty |\lambda_n(T)|,$$

$$\mathrm{tr}(T)=\sum_1^\infty (Te_n,e_n),$$

这里 (,) 是 H 中的内积， $\{e_n\}$ 是 H 中任一直交规格化基. 特别，正定的迹类算子的迹范数与它的迹相等.

利用本征值的极小极大性质，我们不难证明下面的

引理 1 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的迹类算子， R 是 N 秩的有界对称算子，则 $T-R$ 是迹类的，且

$$\sum_{N+1}^\infty |\lambda_n(T)|\le ||T-R||_{\rm tr}. \tag{1}$$

假设定义在 $G\times G$ 上的对称正定核 $K(x,y)$ 是连续的，于是依 Mercer[8] 定理， $K(x,y)$ 生成的积分算子 K 是 $L^2(G)$ 中的迹类算子，它的迹为

$$\mathrm{tr}(K)=\int_G K(x,x)dx_1\cdots dx_m. \tag{2}$$

容易验证， K 的正平方根算子 $S=K^{1/2}$ 由如下核生成：

$$S(x,y)=\sum_1^\infty \lambda_n^{\frac12}(K)\phi_n(x)\bar\phi_n(y),$$

这里 $\phi_n(x)$ 是算子 K 相应于 $\lambda_n(K)$ 的本征函数，级数是在 $L^2(G)$ 中收敛.

把 R^m 中的有界闭区域 G 任意分割成 N 个子区域 $G_1,\cdots,G_N$, 记它们的体积分别为 $\triangle_1,\cdots,\triangle_N$, 令

$$\psi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in G_i\\ 0, & \text{其它情况},\end{cases}\qquad i=1,\cdots,N.$$

$$R(x,y)=\sum_1^N \frac{1}{\Delta_i}\psi_i(x)\psi_i(y).$$

显然核 $R(x,y)$ 是 N 秩正定的，它生成的积分算子记为 R.

引理 2 算子 SRS 是 N 秩正定的，并且

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\iint\limits_{G_iG_i}[K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m, \tag{3}$$

这里 $K_1(x,y)$ 是 $K(x,y)$ 的实部.

证明 SRS 的核为

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{GG}S(x,u)R(u,v)S(v,y)du_1\cdots du_m dv_1\cdots dv_m\\&=\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\int_{G_i}S(x,u)du_1\cdots du_m\overline{\int_{G_i}S(y,v)dv_1\cdots dv_m}\ ,\end{aligned}$$

容易看出，它是 N 秩正定的，根据迹的定义，经过简单的计算可知，

$$\mathrm{tr(SRS)}=\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\iint\limits_{G_iG_i}K(x,y)dy_1\cdots dy_m dx_1\cdots dx_m \tag{4}$$

下面证明算子 K-SRS 是正定的. 事实上, 如用 (,) 表示 $L^2(G)$ 中内积, 那么对任意 $g\in L^2(G)$, 由 Schwarz 不等式知,

$$(Rg,g)=\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\left|\int_{G_i}g(x)dx_1\cdots dx_m\right|^2\le(g,g).$$

所以对任意 $f\in L^2(G)$ 有

$$(\mathrm{SRS}f,f)\le(Sf,Sf)=(Kf,f)$$

从而 $K-\mathrm{SRS}$ 是正定的. 依引理 1, 它还是迹类的，所以

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\mathrm{tr}(K-\mathrm{SRS})=\mathrm{tr}(K)-\mathrm{tr(SRS)}.$$

把 (2) 与 (4) 式代入上式即得：

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\iint\limits_{G_iG_i}[K(x,x)+K(y,y)-2K(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m. \tag{5}$$

这里利用了,

$$\int_G K(x,x)dx_1\cdots dx_m=\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\frac{1}{\Delta_i}\iint\limits_{G_iG_i}[K(x,x)+K(y,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m.$$

设 $K_2(x,y)$ 是 $K(x,y)$ 的虚部，注意到 $K_2(x,y)=-K_2(y,x)$ 可得,

$$\iint\limits_{G_iG_i}[K_2(x,x)+K_2(y,y)-2K_2(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m=0,$$

于是由 (5) 式立得 (3) 式，引理证毕.

§3. 结果

现在叙述本文的结果.

定理 1 假设定义在 $G\times G$ 上的对称正定核 $K(x,y)$ 是连续的，它的实部 $K_1(x,y)$ 的偏导数存在而且连续，那么

$$\lambda_n(K)=o(n^{-1-1/m})\qquad (n\to\infty). \tag{6}$$

证明 根据 $K_1(x,y)$ 的偏导数的连续性，对任给的 $\epsilon>0$, 可取 $\delta(\epsilon)>0$, 使当 $0<\delta<\delta(\epsilon)$ 时，对满足 $|x_j-u_j|<\delta, |y_j-v_j|<\delta$ $(j=1,\cdots,m)$ 的所有 $x,y,u,v\in G$ 有，

$$\sum_1^m\left|\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(x,y)-\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(u,v)\right|<\epsilon.$$

在本文中， $\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(u,v)$ $(j=1,\cdots,m)$ 表示 $K_1(x,y)$ 关于 x_j 的偏导数在 $x=u,y=v$ 处之值，取自然数 L, 使

$$L^{-1}<\max\{\delta(\epsilon),2^{1/m}-1\}.$$

令 $N=L^m$, 把 G 等分成 N 个棱长为 L^{-1} 的 m 维正方体 $G_1,\cdots,G_N$, 那么它们的体积都等于 N^{-1}. 于是依引理 2 我们有

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\frac{1}{2}\sum_1^N N\iint_{G_iG_i}[K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m, \tag{3a}$$

由于每个 $G_i(i=1,2,\cdots,N)$ 都是凸的，所以对任意 $x,y\in G_i$, 利用 $K_1(x,y)=K_1(y,x)$ 和有穷增量公式可得

$$\begin{aligned}K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)=\sum_1^m\Big[&\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta(x-y),x)\\&-\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta'(x-y),y)\Big](x_j-y_j),\end{aligned}$$

其中 $0<\theta,\ \theta'<1$. 因而

$$\begin{aligned}&K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)\\&\qquad\le\sum_1^m\left|\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta(x-y),x)-\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta'(x-y),y)\right||x_j-y_j|<L^{-1}\epsilon.\end{aligned} \tag{7}$$

把 (7) 式代入 (3a) 式，再利用引理 1 即得，

$$\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_l(K)\le\frac{1}{2}L^{-1}\epsilon, \tag{8}$$

从而

$$\sum_{N+1}^{\infty} \lambda_l(K) < N^{-1/m}\epsilon. \tag{9}$$

下面证明，对任何自然数 $n > N$,(9) 式也成立．事实上，取自然数 L_1, 使 $L^m \leq L_1^m \leq n < (L_1+1)^m$. 于是从 L 的取法知， $L_1^{-1} \leq L^{-1} < 2^{1/m} - 1$, 从而

$$2L_1^m > (L_1+1)^m > n. \tag{10}$$

先把 G 等分成 L_1^m 个棱长为 L_1^{-1} 的 m 维正方体，再把其中的 $(n - L_1^m)$ 个分割成 $2(n - L_1^m)$ 个相等的 m 维长方体．这样把 G 分割成的凸子区域的个数为

$$2(n - L_1^m) + (2L_1^m - n) = n,$$

其中每个子区域沿各坐标轴的直径 $\leq L_1^{-1} < \delta(\epsilon)$, 于是重复由 (3a) 式到 (8) 式的证明过程就得到,

$$\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_l(K) \leq \frac{1}{2} L_1^{-1}\epsilon. \tag{11}$$

由 (10) 式易知,

$$L_1^{-1} < \left(\frac{2}{n}\right)^{1/m}. \tag{12}$$

把 (12) 式代入到 (11) 式则有,

$$\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_l(K) < n^{-1/m}\epsilon \quad (n > N),$$

这表明

$$\sum_{n+1}^{\infty} \lambda_l(K) = o(n^{-1/m}) \quad (n \to \infty).$$

由此即知 (6) 式成立．定理证毕.

定理 2 假设定义在 $G \times G$ 上的对称正定核 $K(x,y)$ 是连续的，它的实部 $K_1(x,y)$ 满足 α 阶 Lipschitz 条件，即存在常数 $C > 0$, 使对任何 $x, y \in G$ 有

$$|K_1(x,x) - K_1(x,y)| < C|x-y|^{\alpha}, \tag{13}$$

这里 $0 < \alpha \leq 1$, $|x-y| = \{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_m-y_m|^2\}^{1/2}$, 则

$$\lambda_n(K) = O(n^{-1-\alpha/m}) \qquad (n \to \infty). \tag{14}$$

证明 取自然数 L, 使

$$L^{-1} < 2^{1/m} - 1,$$

令 $N=L^m$, 把 G 等分成 N 个棱长为 L^{-1} 的 m 维正方体 $G_1,\cdots,G_N$. 于是由引理 2 得,

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}N\iint\limits_{G_iG_i}[K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m. \tag{3b}$$

注意到 $K_1(x,y)=K_1(y,x)$, 利用条件 (13), 则当 $x,y\in G_i(i=1,\cdots,N)$ 时有

$$K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)\le 2C|x-y|^{\alpha}\le 2Cm^{\alpha/2}L^{-\alpha}. \tag{15}$$

把 (15) 式代入 (3b) 式，再利用引理 1 即得,

$$\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_l(K)\le Cm^{\alpha/2}L^{-\alpha}, \tag{16}$$

从而

$$\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_l(K)<2^{\alpha/m}Cm^{\alpha/2}N^{-\alpha/m}. \tag{17}$$

下面证明，对任何自然数 $n>N$, (17) 式也成立．事实上，取自然数 L_1, 使

$$L^m\le L_1^m\le n<(L_1+1)^m,$$

像定理 1 的证明中考虑的一样，我们总能把 G 分割成 n 个凸子区域，使得每个子区域沿各坐标轴的直径 $\le L_1^{-1}$, 重复由 (3b) 式到 (16) 式的证明过程则有,

$$\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_l(K)\le Cm^{\alpha/2}L_1^{-\alpha},$$

注意到 $L_1^{-1}<(\frac{2}{n})^{1/m}$ 即立得

$$\sum_{n+1}^{\infty}\lambda_l(K)<2^{\alpha/m}Cm^{\alpha/2}n^{-\alpha/m}\quad (n>N).$$

由此可知 (14) 式成立，定理证毕.

定理 3 假设定义在 $G\times G$ 上的对称正定核 $K(x,y)$ 是连续的，它的实部 $K_1(x,y)$ 的偏导数存在而且满足 α 阶 Lipschitz 条件，即存在常数 $C>0$, 使得对任何 $x,y\in G$ 有

$$\sum_{1}^{m}\left|\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(x,y)-\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(u,v)\right|<C\{|x-u|^{\alpha}+|y-v|^{\alpha}\}. \tag{18}$$

其中 $0<\alpha\le 1, |x-u|=\{|x_1-u_1|^2+\cdots+|x_m-u_m|^2\}^{1/2}$,

$$|y-v|=\{|y_1-v_1|^2+\cdots+|y_m-v_m|^2\}^{1/2},$$

那么

$$\lambda_n(K)=O(n^{-1-(1+\alpha)/m})\qquad (n\to\infty). \tag{19}$$

证明 把 G 进行如定理 2 的证明开始所述的分割，则有

$$||K-\mathrm{SRS}||_{\mathrm{tr}}=\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}N\iint\limits_{G_iG_i}[K_1(x,x)+K_2(y,y)-2K_1(x,y)]dx_1\cdots dx_m dy_1\cdots dy_m. \tag{3c}$$

现在我们来估计 (3c) 式的右边，当 $x,y\in G_i$ $(i=1,\cdots,N)$ 时，

$$\begin{aligned}K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)=\sum_{1}^{m}\Big[&\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta(x-y),x)\\&-\frac{\partial K_1}{\partial x_j}(y+\theta'(x-y),y)\Big](x_j-y_j),\end{aligned}$$

其中 $0<\theta,\ \theta'<1$, 因此利用条件 (18) 得

$$K_1(x,x)+K_1(y,y)-2K_1(x,y)\le 2C|x-y|^{\alpha}L^{-1}\le 2Cm^{\alpha/2}L^{-(1+\alpha)}. \tag{20}$$

把 (20) 式代入到 (3c) 式，再利用引理 1 便知，

$$\sum_{N+1}^{\infty}\lambda_l(K)<2^{\alpha/m}Cm^{\alpha/2}N^{-(1+\alpha)/m}.$$

同定理 2 的证明中的考虑，上式对任何 $n>N$ 也成立，因而随之就可得到 (19) 式，定理证毕.

参 考 文 献

[1] Weidmann, J., Linear Operators in Hilbert Spaces, New York, Springer-Verlag, 1980.

[2] Weyl, H., Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **71**(1912), 441–479.

[3] Reade, J.B., Eigenvalues of positive definite kernels, *SIAM.J.Math. Anal.*, **14**(1983), 152–157.

[4] Reade, J.B., Eigenvalues of Lipschitz kernels, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **93**(1983), 135–140.

[5] Cochran, J. A. and Lukas, M. A., Differentiable positive definite kernels and Lipschitz continuity, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **104**(1988), 361–369.

[6] Han Yanbin, Positive definite kernels and their eigenvalues, *Kexue Tongbao*, **32**(1987), 721–728.

[7] 韩彦彬， H^p 类核及其本征值，数学物理学报， **10**(1990), 126–131.

[8] Zaaner, A. C., Linear Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1953, 534–536.