第48卷第5期 数 学 学 报 Vol.48, No.5
2005年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA Sept., 2005

文章编号: 0583-1431(2005)05-0979-06 **文献标识码: A**

关于 Halpern 的公开问题

张石生

宜宾学院数学系 宜宾 644007
四川大学数学系 成都 610064
E-mail: sszhang_1@yahoo.com.cn

田有先

重庆邮电学院计算机系 重庆 400065
E-mail: tianyouxian@sohu.com

摘　要 在较一般的条件下, 部分地回答了 Halpern 提出的一个公开问题. 本文结果也推广和改进了一些人的最新结果.

关键词 非扩张映象; 迭代序列; 不动点
MR(2000) 主题分类 47H09, 47H10, 49M05, 65J15
中图分类 O177.91

On Halpern's Open Question

Shi Sheng ZHANG

Department of Mathematics, Yibin University, Yibin 644007*, P. R. China*
Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064*, P. R. China*
E-mail: sszhang_1@yahoo.com.cn

You Xian TIAN

Department of Computer Science, Chongqing University of Post and Telecommunications,
Chongqing 400065*, P. R. China*
E-mail : tianyouxian@sohu.com

Abstract Under more general conditions, a partial answer to Halpern's open question is given. The results presented in this paper also extend and improve some recent results.

Keywords Nonexpansive mapping; Iterative sequence; Fixed point
MR(2000) Subject Classification 47H09, 47H10, 49M05, 65J15
Chinese Library Classification O177.91

1 引言及预备知识

本文处处假定 E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, C 是 E 之一非空闭凸子集,

收稿日期: 2004-06-15; 接受日期: 2004-09-15
基金项目: 宜宾学院自然科学基金资助 (2003Z12); 重庆市教委自然科学基金资助 (050308)

$F(T)$ 是映象 T 的不动点集, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象

$$J(x) = \{f \in E^*, \langle x, f \rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|f\| = \|x\|\}, \quad x \in E. \tag{1.1}$$

定义 1 设 $T: C \to C$ 是一映象. T 称为非扩张的, 如果对一切 $x, y \in C$,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

下面, 假定 $T: C \to C$ 是一非扩张映象而且 T 的不动点集 $F(T) \neq \emptyset$ (例如, 当 C 是弱紧的闭凸集且 E 具正规结构, 或者 E 是一致凸的, 或者 E 是一致光滑, 则 T 就有不动点).

定义 2 设 $\cup = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. E 的范数称为一致 Gâteaux 可微的, 如果对每一 $y \in \cup$, 极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

对一切 $x \in \cup$ 一致地存在.

如所周知, 以下命题成立:

命题 1 (见文 [1] 的 7 页或文 [2]) (1) 如果 E 是一致光滑的 Banach 空间, 则由 (1.1) 式定义的正规对偶映象 J 是单值的, 而且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的范数拓扑是一致连续的;

(2) 如果 E 是一 Banach 空间且其范数是一致 Gâteaux 可微的, 则由 (1.1) 式定义的正规对偶映象 $J: E \to 2^{E^*}$ 是单值的. 而且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的弱* 拓扑是一致连续的.

对给定的 $u \in C$ 及每一 $t \in (0, 1)$, 由下式定义一压缩映象 $T_t : C \to C$:

$$T_t x = tu + (1 - t)Tx, \quad x \in C. \tag{1.2}$$

由 Banach 压缩映象原理知 T_t 有唯一的不动点 $z_t \in C$, i.e. z_t 是方程

$$z_t = tu + (1 - t)Tz_t \tag{1.3}$$

的唯一解.

关于序列 $\{z_t\}$ 的收敛性问题, 1967 年 Browder [3] 证明了下之结果: 如果 E 是一 Hilbert 空间, 则当 $t \to 0$ 时, z_t 强收敛于 T 之一不动点; 1980 年 Reich [4] 证明: 如果 E 是一致光滑的 Banach 空间, 则上述的 Browder 的结论仍成立.

1967 年 Halpern [5] 最先研究了下面的另一类显迭代序列的收敛性问题

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 0, \tag{1.4}$$

其中 $u \in C$ 与上面给出的一样, $\{\alpha_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的序列, $x_0 \in C$ 是一给定的点. 他证明: 如果 $\{\alpha_n\}$ 满足某些条件, 其中的两个条件是

(C1) $$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0;$$

(C2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

在文 [5] 中, Halpern 同时提出下面的公开问题:

公开问题 [5] 在 E 是 Hilbert 空间的框架下, 条件 (C1) 和 (C2) 是否就足以保证迭代序列 (1.4) 收敛于 T 在 C 中之一不动点?

1977 年 Lions 在文 [6] 中证明: 如果 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 (C1), (C2) 及下面的条件 (C3):

$$\text{(C3)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n+1}^2} = 0,$$

则迭代序列 (1.4) 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

值得指出的是: Lions 的条件 (C3) 排除了 $\{\alpha_n = \frac{1}{n}\}$ 的这种自然选择. 这一缺陷被 Wittmann 在文 [7] 中所克服. 他证明: 如果 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 (C1), (C2) 及下之条件 (C4):

$$\text{(C4)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty,$$

则迭代序列 (1.4) 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

Reich [4] 及 Shioji 和 Takahashi [8] 分别把 Lions 及 Wittmann 的结果推广到一致光滑的 Banach 空间, Reich [9] 也把 Wittmann 的结果推广到这样的一类 Banach 空间, 它是一致光滑的而具有弱序列连续的对偶映象, 同时要求 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 (C1), (C2) 并且是递减的.

最近 Xu [10] 改进了 Lions 的结果, 他证明如果 $\{\alpha_n\}$ 满足条件 (C1), (C2) 及条件 (C5):

$$\text{(C5)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n} = 0,$$

则迭代序列 (1.4) 在一致光滑的 Banach 空间中强收敛.

前不久, Xu [11] 进一步证明: 如果 E 是一 Hilbert 空间或者 E 是一具弱连续对偶映象的 Banach 空间而且迭代序列 (1.4) 是弱渐进正则的 (即序列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 弱收敛于 0), 或者 E 是一致光滑的而且迭代序列 (1.4) 是渐近正则的 (即序列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 强收敛于 0), 则 (C1) 和 (C2) 是使得迭代序列 (1.4) 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

本文的目的是证明下面的两个定理.

定理 1 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, C 是 E 之一非空闭凸子集, $T: C\to C$ 是一非扩张映象且 $F(T)\neq\emptyset$, $u\in C$ 是一给定的点, 而 $x_0\in C$ 是任一初始点. 如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中之一实数列满足条件 (C1) 和 (C2) 而且由 (1.4) 定义的序列 $\{x_n\}$ 满足下面的条件

$$\|Tx_n - x_n\| \to 0 \ \ (n\to\infty), \tag{1.5}$$

则 x_n 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

定理 2 设 E 是具 Gâteaux 可微范数的且对非扩张映象具有不动点性质的 Banach 空间. 设 C 是 E 之一非空闭凸子集, $T: C\to C$ 是一非扩张映象且 $F(T)\neq\emptyset$. 设 $u\in C$ 是一给定的点, $x_0\in C$ 是任一初始点. 如果 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的满足条件 (C1) 和 (C2) 的实序列, 而且由 (1.4) 定义的序列 $\{x_n\}$ 满足条件 (1.5), 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中之一不动点.

注 1 定理 1 和定理 2 不仅在更一般的框架下对 Halpern 的公开问题给出部分的回答, 而且也推广和改进了文 [5–11] 中相应的结果.

为了证明上述定理, 我们需要下面的引理.

引理 1 [12] 设 $\{\alpha_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个非负的实序列满足条件

$$\alpha_{n+1} \le (1-\lambda_n)\alpha_n + b_n, \quad \forall n \ge n_0,$$

其中 n_0 是某一正整数, $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$, $b_n = o(\lambda_n)$, 则 $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

引理 2 [1, 13] 设 E 是一实 Banach 空间, $J : E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x, y \in E$, 下面的不等式成立

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle, \quad \forall j(x+y) \in J(x+y).$$

引理 3 [4] 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, 设 C, T, z_t 与前面给出的一样, 则强极限 $\lim_{t\to 0} z_t$ 存在, 而且是 T 在 C 中之一不动点.

2 定理的证明

定理 1 的证明 因 E 是一致光滑的 Banach 空间, 由命题 1, 正规对偶映象 $J : E \to 2^{E^*}$ 是单值的, 故由 (1.3) 及引理 2, 有

$$\begin{aligned}
\|z_t - x_n\|^2 &= \|(1-t)(Tz_t - x_n) + t(u - x_n)\|^2 \\
&\le (1-t)^2\|Tz_t - x_n\|^2 + 2t\langle u - x_n,\, J(z_t - x_n)\rangle \\
&= (1-t)^2\|Tz_t - x_n\|^2 + 2t\langle z_t - x_n - z_t + u,\, J(z_t - x_n)\rangle \\
&= (1-t)^2\|Tz_t - x_n\|^2 + 2t\|z_t - x_n\|^2 + 2t\langle u - z_t,\, J(z_t - x_n)\rangle. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

易知正规对偶映象 J 是奇映象 (见文 [1] 第 7 页), 即 $J(-x) = -J(x)$, $x \in E$,故由 (2.1) 式知

$$\begin{aligned}
\langle u - z_t,\, J(x_n - z_t)\rangle &\le \frac{1}{2t}\{(1-t)^2\|Tz_t - x_n\|^2 - (1-2t)\|z_t - x_n\|^2\} \\
&= \frac{1-2t}{2t}\{\|Tz_t - x_n\|^2 - \|z_t - x_n\|^2\} + \frac{t}{2}\|Tz_t - x_n\|^2. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

由引理 3, $z_t \to z \in F(T)$ (当 $t \to 0$), 故有

$$\lim_{t\to 0} \|\, z_t - x_n \,\|^2 = \|z - x_n\|^2. \qquad (2.3)$$

另由归纳法, 由 (1.4) 式可证

$$\|x_n - z\| \le \max\{\|x_0 - z\|, \|u - z\|\}, \quad \forall n \ge 0, \qquad (2.4)$$

及

$$\|Tz_t - x_n\| \le \|Tz_t - z\| + \|x_n - z\| \le \|z_t - z\| + \|x_n - z\|. \qquad (2.5)$$

由 (2.3)–(2.5) 式得知, 序列 $\{\|Tz_t - x_n\|\}$, $\{\|x_n - z\|\}$, $\{\|z_t - x_n\|\}$ 均是有界的. 记

$$M = \sup_{t>0,\, n\ge 0} \{\|Tz_t - x_n\|^2 + \|x_n - z\| + \|z_t - x_n\|\} < \infty. \qquad (2.6)$$

现在考察 (2.2) 式右端第一项. 我们有

$$\begin{aligned}\|Tz_t - x_n\|^2 - \|z_t - x_n\|^2 &\le (\|Tz_t - Tx_n\| + \|Tx_n - x_n\|)^2 - \|z_t - x_n\|^2 \\ &\le (\|z_t - x_n\| + \|Tx_n - x_n\|)^2 - \|z_t - x_n\|^2 \\ &\le \|Tx_n - x_n\|^2 + 2\|Tx_n - x_n\| M. \end{aligned} \tag{2.7}$$

现考察 (2.2) 式右端第二项, 我们有

$$\frac{t}{2}\|Tz_t - x_n\|^2 \le \frac{t}{2}M, \quad \forall\, t > 0, \quad n \ge 0. \tag{2.8}$$

把 (2.7), (2.8) 式代入 (2.2) 式, 即得

$$\langle u - z_t,\, J(\,x_n - z_t\,)\rangle \le \frac{1-2t}{2t}\{\|Tx_n - x_n\|^2 + 2M\|Tx_n - x_n\|\} + \frac{t}{2}M, \ \ \forall\, t > 0,\ n \ge 0. \tag{2.9}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle u - z_t,\, J(\,x_n - z_t\,)\rangle \le \frac{t}{2}M, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.10}$$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n \ge N$ 时, 有

$$\langle u - z_t,\, J(\,x_n - z_t)\rangle \le \frac{t}{2}M + \varepsilon, \ \ \forall\, t > 0.$$

因 $z_t \to z$ (当 $t \to 0$ 时), 而且由命题 1 知 J 在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的弱* 拓扑是一致连续的, 故有

$$\lim_{t\to 0}\langle u - z_t,\, J(x_n - z_t)\rangle = \langle u - z,\, J(x_n - z_t)\rangle \le \varepsilon, \ \ \forall\, n \ge N,$$

即

$$\langle u - z,\, J(x_n - z)\rangle \le \varepsilon, \quad \forall\, n \ge N.$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle\, u - z, J(x_n - z)\rangle \le \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 故得

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle u - z,\, J(\,x_n - z\,)\rangle \le 0. \tag{2.11}$$

令 $\gamma_n = \max\{\langle u - z,\, J(\,x_n - z\,)\rangle, 0\}$, $\forall\, n \ge 0$, 下证

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{2.12}$$

事实上, 由 (2.11) 式知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 使得

$$\langle u - z,\, J(\,x_n - z\,)\rangle \le \varepsilon, \ \ \forall\, n \ge N_1,$$

从而有 $0 \le \gamma_n < \varepsilon$, $\forall\, n \ge N_1$. 由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即知

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0.$$

另一方面, 由 (1.4) 式, 引理 2 及 (2.12) 式, 可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\|^2 &= \|(1-\alpha_n)(Tx_n-z)+\alpha_n(u-z)\|^2\\ &\le (1-\alpha_n)^2\|Tx_n-z\|^2+2\alpha_n\langle u-z, J(x_{n+1}-z)\rangle\\ &\le (1-\alpha_n)^2\|Tx_n-z\|^2+2\alpha_n\gamma_{n+1}\\ &\le (1-\alpha_n)\|Tx_n-z\|^2+2\alpha_n\gamma_{n+1}\\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+2\alpha_n\gamma_{n+1}.\end{aligned}$$

在引理 1 中取 $\alpha_n=\|x_n-z\|^2$, $\lambda_n=\alpha_n$, $b_n=2\alpha_n\gamma_{n+1}$, 并注意 $b_n=0(\lambda_n)$, 故引理 1 的条件被满足. 于是由引理 1 即得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-z\|=0.$$

即 $x_n\to z\in F(T)$. 证毕.

定理 2 的证明 因 E 是具一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间, 由命题 1, 正规对偶映象 $J:E\to 2^{E^*}$ 是单值的, 而且在 E 的每一有界子集上由 E 的范数拓扑到 E^* 的弱* 拓扑是一致连续的. 又因 E 对非扩张映象具有不动点性质, 故由一已知的结果 (见文 [10, 11]) 知, 当 $t\to 0$ 时, z_t 强收敛 T 在 C 中之一不动点. 因此利用定理 1 中给出的证明方法, 立刻可证定理 2 的结论成立. 证毕.

参 考 文 献

[1] Chang S. S., Cho Y. J., Zhou H. Y., Iterative methods for nonlinear operator equations in Banach spaces, New York: Nova Science Publishers, Inc. 2002.

[2] Goebel K., Kirk W. A., A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, **35**(1): 171–174.

[3] Browder F. E., Convergence of approximants to fixed pointd of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1967, **24**, 82–90.

[4] Reich S., Strong convergence theorerns for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 1980, **75**: 128–292.

[5] Halpern B., Fixed points of nonexpansive maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, **73**: 957–961.

[6] Lions P. L., Approximation de points fixes de contractions, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, 1977, **284**: 1357–1359.

[7] Wittmann R., Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.*, 1992, **58**: 486–491.

[8] Shioji N., Takahashi W., Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1997, **125**(12): 3641–3645.

[9] Reich S., Approximating fixed points of nonexpansive mappings, *Pan. Amer. Math. J.*, 1994, **4**: 23–28.

[10] Xu H. K., Another control condition in an iterarive method for nonexpansive mappings, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 2002, **65**: 109–113.

[11] Xu H. K., Remark on an iterative method for nonexpansive mappings, *Commun. Applied Nonlinear Anal.*, 2003, **10**: 67–75.

[12] Wang X., Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mappings, *Proc. Amer Math. Soc.*, 1991, **113**: 727–731.

[13] Chang S. S., Some problems and results in the study of nonlinear analysis, *Nonlinear Anal. TMA*, 1997, **30**(7): 4197–4208.