

一维 Maxwell 方程间断解的多区域 Legendre tau 方法^{*1)}

方丹丹 马和平
(上海大学理学院, 上海 200444)

摘要

以一维非一致介质 Maxwell 方程的间断问题为模型, 建立了多区域 Legendre tau 方法。不同于 Galerkin 方法, 对电场和磁场的逼近采用不同的多项式次数, 使电场和磁场的计算可以解耦。同时改进了精度, 对于半离散情况证明了格式的稳定性和最优阶误差估计。数值算例验证了多区域 Legendre tau 方法对于该间断问题的有效性。

关键词: Maxwell 方程; 间断问题; 多区域 Legendre tau 方法

MR (2010) 主题分类: 65M70, 65M12

MULTIDOMAIN LEGENDRE TAU METHOD FOR THE 1-D MAXWELL EQUATION WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS

Fang Dandan Ma Heping
(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract

A multidomain Legendre tau method is established for the 1-D Maxwell's equations of nonhomogeneous media with discontinuous solutions. Unlike the Galerkin method, polynomials of different degrees are used to approximate the electric and magnetic fields, respectively, so that they can be decoupled in computation. Also, the method improves the accuracy, and the stability and optimal error estimates of the semi-discrete scheme are given. Numerical examples show the effectiveness of the method without being affected by the discontinuity of the solutions.

Keywords: Maxwell's equation; discontinuous solution; multidomain Legendre tau method

2010 Mathematics Subject Classification: 65M70, 65M12

1. 引言

Maxwell 方程组是描述电磁场现象重要的偏微分方程, 众多学者研究了它的数值解法^[1-9]。Chen 等人研究了求解 Maxwell 方程的能量守恒算子分裂方法^[6, 7]。Zeng 等人将能量守恒算子分裂方法应用于二维 Maxwell 方程的 Legendre-Galerkin 方法^[8]。在许多实际应用中, 需要考虑非一致介质的情况, 此时解会有间断或弱间断, 给计算带来困难。Zhao 等人采用高阶导

^{*} 2018 年 5 月 2 日收到。

¹⁾ 基金项目: 国家自然科学基金 (11571224)。

数匹配方法^[5], 在交界处引进虚拟点, 并利用高阶跳跃条件以得到高精度, 但格式变得较复杂. Ma 等人采用多区域 Legendre–Galerkin 谱方法求解一维非一致介质 Maxwell 方程^[9].

本文考虑一维非一致介质 Maxwell 方程^[5]

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t E_z = \partial_x H_y, & (x, t) \in (I_1 \cup I_2) \times (0, T], \\ \mu \partial_t H_y = \partial_x E_z, & (x, t) \in (I_1 \cup I_2) \times (0, T], \\ E_z(-1, t) = E_z(1, t) = 0, & t \in (0, T], \\ E_z(x, 0) = E_{z0}(x), H_y(x, 0) = H_{y0}(x), & x \in I = (-1, 1), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 E_z 和 H_y 分别是电场强度和磁场强度, ϵ 和 μ 分别为介电常数和磁导率, 且设 $I_1 = (-1, 0)$, $I_2 = (0, 1)$, $\epsilon|_{I_i} = \epsilon_i$, $\mu|_{I_i} = \mu_i$ 为正常数, 并考虑 Zhao 等人提出的两种交界处连接条件^[5]: 一种为交界处连续, 解有弱间断的情况; 另一种为 E_z 在交界处有跳跃, 解有间断的情况.

对于具有间断解的问题可以采用多区域谱方法求解. 多区域谱方法或谱元法把区域分成多个互不相交的子区域, 采用分片多项式逼近^[10–12]. Ji 等人发展了求解非线性对流扩散方程的多区域拟谱方法^[13], 通过构造适当的基函数, 使得离散后代数方程组的系数矩阵具有稀疏性, 并可实现计算并行化. Ma 等人利用多区域 Legendre–Galerkin Chebyshev 配置法求解具有间断解的一维发展方程^[9], 显示了多区域谱方法的有效性.

本文建立了方程 (1.1) 的多区域 Legendre tau(MLT) 方法, 针对一阶微分算子的不对称性, 不同于 Galerkin 方法^[8], 采纳 tau 方法的思想, 对 E_z 和 H_y 分别使用 N 次和 $N - 1$ 次的多项式逼近, 使得它们的求解可以解耦, 并能提高逼近精度, 将原有的误差估计^[8] 改进到具有最优阶.

本文安排如下: 首先, 建立一维 Maxwell 方程的半离散多区域 Legendre tau 方法, 并简单说明该格式的具体算法. 然后, 分别根据连续和跳跃两种交界处条件, 证明半离散格式的稳定性, 并导出误差估计. 最后, 结合经典的四阶 Runge–Kutta 方法, 给出该格式的数值算例, 并与相关方法进行比较.

2. 连续交界处条件

2.1. 记号与格式

先引进一些记号. 记 $(\cdot, \cdot)_\Omega$ 和 $\|\cdot\|_\Omega$ 为复值函数空间 $L^2(\Omega)$ 的内积和范数. 对于正整数 σ , 令 $H^\sigma(\Omega)$ 为通常的 Sobolev 空间, 其范数和半范数分别记为 $\|\cdot\|_{\sigma, \Omega}$ 和 $|\cdot|_{\sigma, \Omega}$. 当 $\Omega = I$ 时, 则在记号的下标中将其省略. 定义 $H_0^1(I) = \{u \in H^1(I) : u(-1) = u(1) = 0\}$, 并引入分段 Sobolev 空间及其半范数

$$\tilde{H}^\sigma(I) = \{u : u|_{I_i} \in H^\sigma(I_i), i = 1, 2\}, \quad |u|_{\tilde{H}^\sigma(I)} = (|u|_{\sigma, I_1}^2 + |u|_{\sigma, I_2}^2)^{1/2}.$$

对正整数 N_i , \mathbb{P}_{N_i} 表示次数不超过 N_i 的复系数多项式组成的空间. 定义分段多项式空间

$$W_N = \{\varphi : \varphi|_{I_i} \in \mathbb{P}_{N_i}, i = 1, 2\},$$

以及逼近空间

$$V_N^0 = H_0^1(I) \cap W_N(I), \quad W_{N-1} = \{\varphi : \varphi|_{I_i} \in \mathbb{P}_{N_i-1}, i = 1, 2\}.$$

设 $\hat{x}_j^i (j = 0, 1, \dots, N_i)$ 为参考区间 $\hat{I} = (-1, 1)$ 上的 Chebyshev–Gauss–Lobatto(CGL) 节点. 令 $\{x_j^i\}$ 表示子区间 $I_i = (a_{i-1}, a_i)$ 上的 CGL 点, 记 $h_i = a_i - a_{i-1}$ 和

$$I_{N_i}^i = \{x_j^i : x_j^i = \frac{h_i \hat{x}_j^i + a_{i-1} + a_i}{2}, 0 \leq j \leq N_i\}.$$

本文中 $a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1$. 定义 Chebyshev–Gauss–Lobatto 插值 $I_N^C u \in W_N$ 满足

$$(I_N^C u)|_{I_i}(x_j^i) = u|_{I_i}(x_j^i), \forall x_j^i \in I_{N_i}^i.$$

用 $\varphi(x) = \hat{\varphi}(\hat{x})$ 建立 I_i 上的函数与参考区间 \hat{I} 上的函数之间的对应, 令 $P_{N-1} : L^2(I) \rightarrow W_{N-1}$ 由 L^2 正交投影算子 $\hat{P}_{N_i-1} : L^2(\hat{I}) \rightarrow \mathbb{P}_{N_i-1}$ 产生, 即

$$(P_{N-1} u)|_{I_i}(x) = \hat{P}_{N_i-1}(\widehat{u|_{I_i}})(\hat{x}).$$

方程 (1.1) 的弱形式可写为: 找 $E_z \in H_0^1(I)$ 和 $H_y \in L^2(I)$ 使得

$$\begin{cases} (\epsilon \partial_t E_z, v) = -(H_y, \partial_x v), & \forall v \in H_0^1(I), \\ (\mu \partial_t H_y, w) = (\partial_x E_z, w), & \forall w \in L^2(I). \end{cases} \quad (2.1)$$

据此建立相应的半离散多区域 Legendre tau 格式: 找 $E_{zN} \in V_N^0$ 和 $H_{yN} \in W_{N-1}$, 使得

$$\begin{cases} (\epsilon \partial_t E_{zN}, v) = -(H_{yN}, \partial_x v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\mu \partial_t H_{yN}, w) = (\partial_x E_{zN}, w), & \forall w \in W_{N-1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

并取初值 $E_{zN}(0) = I_N^C E_{z0}, H_{yN}(0) = P_{N-1} I_N^C H_{y0}$.

具体计算时, 设 L_l 是第 l 阶 Legendre 多项式, 定义如下的内部基函数:

$$\phi_l^{(i)}(x) = \begin{cases} L_{l+2}(\hat{x}) - L_l(\hat{x}), & x = \frac{h_i \hat{x} + a_{i-1} + a_i}{2} \in [a_{i-1}, a_i], \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则 $\{\phi_l^{(i)}|_{I_i}\}_{l=0}^{N_i-2}$ 为 $H_0^1(I_i) \cap \mathbb{P}_{N_i}$ 的基函数 ($i = 1, 2$), 再补充交界处连接基函数:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{L_0(\hat{x}) + L_1(\hat{x})}{2}, & x = \frac{h_1 \hat{x} + a_0 + a_1}{2} \in [a_0, a_1], \\ \frac{L_0(\hat{x}) - L_1(\hat{x})}{2}, & x = \frac{h_2 \hat{x} + a_1 + a_2}{2} \in (a_1, a_2]. \end{cases}$$

类似地定义 $L_l^{(i)}(x) = L_l(\hat{x})$. 将近似解 E_{zN}, H_{yN} 分别表示为

$$\begin{aligned} E_{zN}(x, t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{l=0}^{N_i-2} c_l^{(i)}(t) \phi_l^{(i)}(x) + c(t) \phi(x), \\ H_{yN}(x, t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{l=0}^{N_i-1} d_l^{(i)}(t) L_l^{(i)}(x). \end{aligned}$$

代入格式即得到常微分方程组

$$\begin{cases} \epsilon A_1 \partial_t \mathbf{E}_N(t) = -B_1 \mathbf{H}_N(t), \\ \mu A_2 \partial_t \mathbf{H}_N(t) = B_2 \mathbf{E}_N(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

其中 $\mathbf{E}_N(t)$ 和 $\mathbf{H}_N(t)$ 分别为近似解 E_{zN} 和 H_{yN} 的系数组成的向量, 矩阵 $A_k, B_k (k = 1, 2)$ 具有稀疏性, 其元素分别为相应基函数的内积.

为了得到好的误差估计, 引入投影算子 $\hat{P}_{N_i}^1 : H^1(\hat{I}) \rightarrow \mathbb{P}_{N_i}$, 满足

$$\hat{P}_{N_i}^1 \hat{u}(\hat{x}) = \hat{u}(-1) + \int_{-1}^{\hat{x}} \hat{P}_{N_i-1} \partial_{\hat{x}} \hat{u}(y) dy.$$

令 P_N^1 是由 $\hat{P}_{N_i}^1$ 产生的 H^1 -Legendre 谱投影算子, 即

$$(P_N^1 u)|_{I_i}(x) = \hat{P}_{N_i}^1 \widehat{(u|_{I_i})}(\hat{x}).$$

记 $\hbar_i = h_i N_i^{-1} (i = 1, 2)$, 有下面的逼近结果 [13–15].

引理 1. 设 $\varphi \in \tilde{H}^\sigma(I) (\sigma \geq 1)$, 则有

$$\begin{aligned} |I_N^C \varphi - \varphi|_{\tilde{H}^r(I)} &\leq C(\hbar_1^{2(\sigma-r)} |\varphi|_{\sigma, I_1}^2 + \hbar_2^{2(\sigma-r)} |\varphi|_{\sigma, I_2}^2)^{1/2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ |P_N^1 \varphi - \varphi|_{\tilde{H}^r(I)} &\leq C(\hbar_1^{2(\sigma-r)} |\varphi|_{\sigma, I_1}^2 + \hbar_2^{2(\sigma-r)} |\varphi|_{\sigma, I_2}^2)^{1/2}, \quad 0 \leq r \leq 1, \\ \|P_N \varphi - \varphi\| &\leq C(\hbar_1^{2\sigma} |\varphi|_{\sigma, I_1}^2 + \hbar_2^{2\sigma} |\varphi|_{\sigma, I_2}^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. 半离散格式的稳定性和收敛性

下面考虑格式的稳定性.

定理 1. 设 E_{zN} 和 H_{yN} 是半离散多区域 Legendre tau 方法 (2.2) 的解, 右端有扰动 \tilde{f}_i , 则有

$$\begin{aligned} &\sqrt{\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}(t)\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}(t)\|^2} \\ &\leq \sqrt{\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}(0)\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}(0)\|^2} + C\sqrt{t} \sqrt{\int_0^t (\|\sqrt{\epsilon^{-1}} \tilde{f}_1(s)\|^2 + \|\sqrt{\mu^{-1}} \tilde{f}_2(s)\|^2) ds}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

证明. 考虑格式 (2.2) 带有右端扰动 \tilde{f}_i ,

$$\begin{cases} (\epsilon \partial_t E_{zN}, v) = -(H_{yN}, \partial_x v) + (\tilde{f}_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\mu \partial_t H_{yN}, w) = (\partial_x E_{zN}, w) + (\tilde{f}_2, w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

取 $v = E_{zN}$, $w = H_{yN}$, 有

$$(\epsilon \partial_t E_{zN}, E_{zN}) + (\mu \partial_t H_{yN}, H_{yN}) = (\tilde{f}_1, E_{zN}) + (\tilde{f}_2, H_{yN}). \quad (2.7)$$

由 Cauchy–Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}\|^2 \right) &= \sqrt{\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}\|^2} \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}\|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re}\{(\tilde{f}_1, E_{zN}) + (\tilde{f}_2, H_{yN})\} \\ &\leq \sqrt{\|\sqrt{\epsilon^{-1}} \tilde{f}_1\|^2 + \|\sqrt{\mu^{-1}} \tilde{f}_2\|^2} \sqrt{\|\sqrt{\epsilon} E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\mu} H_{yN}\|^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

即有

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{\|\sqrt{\epsilon}E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\mu}H_{yN}\|^2} \right) \leq \sqrt{\|\sqrt{\epsilon^{-1}}\tilde{f}_1\|^2 + \|\sqrt{\mu^{-1}}\tilde{f}_2\|^2}. \quad (2.9)$$

对上式积分便证明了稳定性 (2.5).

当 \tilde{f}_1 和 \tilde{f}_2 为零时, 可由 (2.8) 直接得到下面的守恒性质.

定理 2. 设 E_{zN} 和 H_{yN} 是半离散多区域 Legendre tau 方法 (2.2) 的解, 则有

$$\|\sqrt{\epsilon}E_{zN}(t)\|^2 + \|\sqrt{\mu}H_{yN}(t)\|^2 \equiv C. \quad (2.10)$$

接下来考虑格式的收敛性. 令 $E_z^* = P_N^1 E_z$ 为 H^1 -Legendre 谱投影, $H_y^* = P_{N-1} H_y$ 为 L^2 -Legendre 谱投影, 由方程 (2.1), 利用投影算子的性质, 注意

$$(\partial_x(P_N^1 E_z - E_z), w) = 0, \quad \forall w \in W_{N-1},$$

并记 $f_1 = \epsilon(P_N^1 - I)\partial_t E_z$, 得到

$$\begin{cases} (\epsilon\partial_t E_z^*, v) = -(H_y^*, \partial_x v) + (f_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\mu\partial_t H_y^*, w) = (\partial_x E_z^*, w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (2.11)$$

令 $e_z = E_z^* - E_{zN}$, $e_y = H_y^* - H_{yN}$, 即有如下的误差方程

$$\begin{cases} (\epsilon\partial_t e_z, v) = -(e_y, \partial_x v) + (f_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\mu\partial_t e_y, w) = (\partial_x e_z, w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (2.12)$$

利用前面的稳定性结果, 可得以下收敛性定理. 记 $\hbar = \max_{1 \leq i \leq 2} \hbar_i$.

定理 3. 设 E_z , H_y 是 (1.1) 满足连续交界处条件的解, E_{zN} , H_{yN} 是 (2.2) 的解, 并假设 $\sigma \geq 1$, $E_z \in H^1(0, T; \tilde{H}^\sigma(I))$, $H_y \in C([0, T]; \tilde{H}^\sigma(I))$, 则存在常数 C , 使得

$$\|\sqrt{\epsilon}(E_z - E_{zN})(t)\| + \|\sqrt{\mu}(H_y - H_{yN})(t)\| \leq C(1 + \sqrt{T})\hbar^\sigma, \quad t \leq T. \quad (2.13)$$

证明. 由 (2.12) 式, 直接利用前面的稳定性估计 (2.8), 即有如下误差估计

$$\sqrt{\|\sqrt{\epsilon}e_z(t)\|^2 + \|\sqrt{\mu}e_y(t)\|^2} \leq \sqrt{\|\sqrt{\epsilon}e_z(0)\|^2 + \|\sqrt{\mu}e_y(0)\|^2} + C\sqrt{t} \sqrt{\int_0^t \|\sqrt{\epsilon^{-1}}f_1(s)\|^2 ds}. \quad (2.14)$$

根据引理 1, 可如下估计初始误差

$$\begin{aligned} \|e_z(0)\| &= \|P_N^1 E_{z0} - I_N^C E_{z0}\| \leq C\hbar^\sigma |E_{z0}|_{\tilde{H}^\sigma(I)}, \\ \|e_y(0)\| &= \|P_{N-1} H_{y0} - P_{N-1} I_N^C H_{y0}\| \leq C\hbar^\sigma |H_{y0}|_{\tilde{H}^\sigma(I)}, \end{aligned}$$

以及截断误差

$$\int_0^t \|\sqrt{\epsilon^{-1}}f_1(s)\|^2 ds \leq C\hbar^{2\sigma} |\partial_t E_z|_{L^2(0, T; \tilde{H}^\sigma(I))}^2,$$

将上述估计代入 (2.14), 结合逼近结果引理 1, 再利用三角不等式, 即证得误差估计 (2.13).

注意估计式 (2.13) 达到了最优阶, 改进了相关结果^[8], 且其中的 C 不依赖于 T , 避免了通常估计中关于 T 指数增长的因子.

3. 间断交界处条件

本节考虑一种交界处间断的情况, 从相对于坐标处于某一角度的二维材料界面问题退化而来^[5]. 它有一个重要特征是电磁分量 E_z 在材料界面处变得不连续. 定义 θ 为垂直于界面的单位向量 \mathbf{n} 和 x 轴之间的角度, 此时 E_z 在界面处是不连续的, 满足下列关系

$$E_z(0-, t) = \frac{\epsilon_2}{1 + (\epsilon_2 - 1)\cos^2\theta} E_z(0+, t). \quad (3.1)$$

令 $\tilde{\epsilon}|_{I_1} = 1 + (\epsilon_2 - 1)\cos^2\theta$, $\tilde{\epsilon}|_{I_2} = \epsilon_2$, 记 $[v]_0 = v(0+, t) - v(0-, t)$, 则跳跃条件可写为

$$[\tilde{\epsilon}E_z]_0 = 0, \quad [H_y]_0 = 0.$$

3.1. 记号与格式

引入分段 Sobolev 空间, 定义

$$\tilde{H}_{\square,0}^1(I) = \{u \in \tilde{H}^1(I) : [\tilde{\epsilon}u]_0 = 0, \quad u(-1) = u(1) = 0\},$$

以及分段多项式逼近空间

$$V_N^{\square,0} = \tilde{H}_{\square,0}^1(I) \cap W_N.$$

此时 $\tilde{\epsilon}E_z$ 是连续的, 方程 (1.1) 的弱形式可写为: 找 $E_z \in \tilde{H}_{\square,0}^1(I)$ 和 $H_y \in L^2(I)$ 使得

$$\begin{cases} (\partial_t E_z, v) = -(\epsilon^{-1} H_y, \partial_x v), & \forall v \in H_0^1(I), \\ (\partial_t H_y, w) = ((\tilde{\epsilon}\mu)^{-1} \partial_x(\tilde{\epsilon}E_z), w), & \forall w \in L^2(I). \end{cases} \quad (3.2)$$

据此建立相应的半离散多区域 Legendre tau 格式: 找 $E_{zN} \in V_N^{\square,0}$ 和 $H_{yN} \in W_{N-1}$ 使得

$$\begin{cases} (\partial_t E_{zN}, v) = -(\epsilon^{-1} H_{yN}, \partial_x v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\partial_t H_{yN}, w) = ((\tilde{\epsilon}\mu)^{-1} \partial_x(\tilde{\epsilon}E_{zN}), w), & \forall w \in W_{N-1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

并取初始值 $E_{zN}(0) = I_N^C E_{z0}$, $H_{yN}(0) = P_{N-1} I_N^C H_{y0}$.

3.2. 半离散格式的稳定性和收敛性

下面给出稳定性定理. 记 $\tilde{\mu} = \epsilon^{-1} \tilde{\epsilon} \mu$.

定理 4. 设 E_{zN} 和 H_{yN} 是半离散多区域 Legendre tau 方法 (3.3) 的解, 右端有扰动 \tilde{f}_i , 则有

$$\begin{aligned} & \sqrt{\|\sqrt{\tilde{\epsilon}} E_{zN}(t)\|^2 + \|\sqrt{\tilde{\mu}} H_{yN}(t)\|^2} \\ & \leq \sqrt{\|\sqrt{\tilde{\epsilon}} E_{zN}(0)\|^2 + \|\sqrt{\tilde{\mu}} H_{yN}(0)\|^2} + C\sqrt{t} \sqrt{\int_0^t (\|\sqrt{\tilde{\epsilon}} \tilde{f}_1(s)\|^2 + \|\sqrt{\tilde{\mu}} \tilde{f}_2(s)\|^2) ds}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

证明. 考虑格式 (3.3) 带有右端扰动 \tilde{f}_i ,

$$\begin{cases} (\partial_t E_{zN}, v) = -(\epsilon^{-1} H_{yN}, \partial_x v) + (\tilde{f}_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\partial_t H_{yN}, w) = ((\tilde{\epsilon}\mu)^{-1} \partial_x(\tilde{\epsilon}E_{zN}), w) + (\tilde{f}_2, w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (3.5)$$

取 $v = \tilde{\epsilon}E_{zN} \in V_N^0$, $w = \tilde{\mu}H_{yN} \in W_{N-1}$, 有

$$\begin{cases} (\partial_t E_{zN}, \tilde{\epsilon}E_{zN}) = -(\epsilon^{-1}H_{yN}, \partial_x(\tilde{\epsilon}E_{zN})) + (\tilde{f}_1, \tilde{\epsilon}E_{zN}), \\ (\partial_t H_{yN}, \tilde{\mu}H_{yN}) = (\partial_x(\tilde{\epsilon}E_{zN}), \epsilon^{-1}H_{yN}) + (\tilde{f}_2, \tilde{\mu}H_{yN}), \end{cases}$$

两式相加得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\sqrt{\tilde{\epsilon}}E_{zN}\|^2 + \|\sqrt{\tilde{\mu}}H_{yN}\|^2 \right) = \operatorname{Re}\{(\tilde{f}_1, \tilde{\epsilon}E_{zN}) + (\tilde{f}_2, \tilde{\mu}H_{yN})\}, \quad (3.6)$$

类似于定理 1 证明, 即可得到稳定性 (3.4).

当 \tilde{f}_1 和 \tilde{f}_2 为零时, 同样有下面的守恒性质.

定理 5. 设 E_{zN} 和 H_{yN} 是半离散多区域 Legendre tau 方法 (3.3) 的解, 则有

$$\|\sqrt{\tilde{\epsilon}}E_{zN}(t)\|^2 + \|\sqrt{\tilde{\mu}}H_{yN}(t)\|^2 \equiv C. \quad (3.7)$$

接下来考虑格式的收敛性. 令 $E_z^* = P_N^1 E_z$, $H_y^* = P_{N-1} H_y$, 记 $f_1 = (P_N^1 - I) \partial_t E_z$, 类似于 (2.11), 由方程 (3.2) 得到

$$\begin{cases} (\partial_t E_z^*, v) = -(\epsilon^{-1}H_y^*, \partial_x v) + (f_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\partial_t H_y^*, w) = ((\tilde{\epsilon}\mu)^{-1} \partial_x(\tilde{\epsilon}E_z^*), w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (3.8)$$

令 $e_z = E_z^* - E_{zN}$, $e_y = H_y^* - H_{yN}$, 得到误差方程

$$\begin{cases} (\partial_t e_z, v) = -(\epsilon^{-1}e_y, \partial_x v) + (f_1, v), & \forall v \in V_N^0, \\ (\partial_t e_y, w) = ((\tilde{\epsilon}\mu)^{-1} \partial_x(\tilde{\epsilon}e_z), w), & \forall w \in W_{N-1}. \end{cases} \quad (3.9)$$

因此, 可以直接利用稳定性结果 (3.4), 并类似于定理 3, 得到以下收敛性定理.

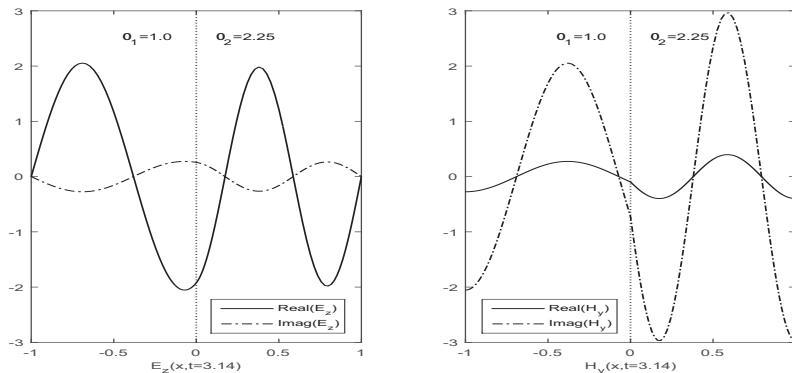


图 1 Maxwell 方程的弱间断解

定理 6. 设 E_z, H_y 是 (1.1) 满足间断交界处条件 (3.1) 的解, E_{zN}, H_{yN} 是 (3.3) 的解, 并假设 $\sigma \geq 1$, $E_z \in H^1(0, T; \dot{H}^\sigma(I))$, $H_y \in C([0, T]; \dot{H}^\sigma(I))$, 则存在常数 C , 使得

$$\|\sqrt{\tilde{\epsilon}}(E_z - E_{zN})(t)\| + \|\sqrt{\tilde{\mu}}(H_y - H_{yN})(t)\| \leq C(1 + \sqrt{T})h^\sigma, \quad t \leq T. \quad (3.10)$$

4. 数值算例

本节进行多区域 Legendre tau 方法的数值试验, 并与时域有限差分 - 隐式导数匹配 (FDTD-IDM) 方法的结果^[5] 作比较. 取非一致介质 Maxwell 方程 (1.1) 的真解为^[5, 16]:

$$E_z(x, t) = \begin{cases} [a_1 \exp(i\sqrt{\epsilon_1}\omega x) - b_1 \exp(-i\sqrt{\epsilon_1}\omega x)] \exp(i\omega t), & -1 \leq x \leq 0, \\ [a_2 \exp(i\sqrt{\epsilon_2}\omega x) - b_2 \exp(-i\sqrt{\epsilon_2}\omega x)] \exp(i\omega t), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$H_y(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\epsilon_1}[a_1 \exp(i\sqrt{\epsilon_1}\omega x) + b_1 \exp(-i\sqrt{\epsilon_1}\omega x)] \exp(i\omega t), & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{\epsilon_2}[a_2 \exp(i\sqrt{\epsilon_2}\omega x) + b_2 \exp(-i\sqrt{\epsilon_2}\omega x)] \exp(i\omega t), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned} a_1 &= (\sqrt{\epsilon_2} \cos(\sqrt{\epsilon_2}\omega)) / (\sqrt{\epsilon_1} \cos(\sqrt{\epsilon_1}\omega)), & b_1 &= a_1 \exp(-i2\sqrt{\epsilon_1}\omega), \\ a_2 &= \exp(-i\omega(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2})), & b_2 &= a_2 \exp(i2\sqrt{\epsilon_2}\omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

介电常数和磁导率分别取为 $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 2.25$ 和 $\mu_1 = \mu_2 = 1$. 时间离散与 FDTD-IDM 方法相同^[5], 采用经典的四阶 Runge-Kutta 方法. 在时刻 t 的离散 L^2 - 误差和 L^∞ - 误差分别表示为

$$\mathbb{E}_2(v) = \|v_N - I_N^C v\|, \quad \mathbb{E}_\infty(v) = \max_{x_j^i \in I_{N_i}^i} |v_N(x_j^i) - v(x_j^i)|.$$

例 1. 交界处连续, 解有弱间断的情况. 波数 ω 满足 $\sqrt{\epsilon_2} \tan(\sqrt{\epsilon_1}\omega) = -\sqrt{\epsilon_1} \tan(\sqrt{\epsilon_2}\omega)$.

图 1 是 $\omega \approx 5.07218116182516$, $t = \pi$ 时真解的图像, 其中实线和虚线分别为解的实部和虚部, 从中可见解在交界处 $x = 0$ 有弱间断.

表 1 Maxwell 方程弱间断解 MLT 方法在 $t = 1$ 时的离散 L^∞ - 误差

$\omega \approx 5.07218116182516$					
τ	(N_1, N_2)	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	误差阶	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$	误差阶
1e-02	(20, 20)	5.78e-07		8.39e-07	
1e-03		5.78e-11	$\tau^{4.00}$	8.63e-11	$\tau^{3.98}$
1e-04	(10, 10)	9.07e-05		2.04e-03	
	(20, 20)	9.89e-14	$M^{-29.77}$	2.99e-12	$M^{-29.35}$
$\omega \approx 36.48810769772309$					
τ	(N_1, N_2)	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	误差阶	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$	误差阶
1e-03	(56, 56)	1.12e-06		1.62e-06	
1e-04		1.12e-10	$\tau^{4.00}$	1.67e-10	$\tau^{3.99}$
1e-04	(48, 48)	8.55e-09		1.50e-07	
	(56, 56)	1.12e-10	$M^{-28.14}$	1.67e-10	$M^{-44.14}$

表 1 给出多区域 Legendre tau 方法在 $t = 1$ 时的离散 L^∞ - 误差. 先取较大的 N_i , 让时间步长 τ 由大变小, 以检验时间方向的误差阶; 再取较小的时间步长 τ , 让 N_i 由小变大, 以检验

空间方向的谱逼近的精度. 表中的数值结果与理论分析相一致, 显示出时间逼近具有四阶精度, 空间逼近具有谱精度. 表 2 给出多区域 Legendre tau 方法的离散 L^2 - 误差和 L^∞ - 误差, 且与 FDTD-IDM 方法^[5]进行比较, 对低频 $\omega \approx 5.07218116182516$ 和高频 $\omega \approx 36.48810769772309$, 分别取 $t = \pi$, $\tau = \pi \times 10^{-4}$ 和 $t = \pi/2$, $\tau = \pi/5 \times 10^{-4}$, 空间离散 FDTD-IDM 方法分别取 $N = 50$ 和 $N = 200$, 并附加 $M = 8$ 个交界处匹配条件, MLT 方法分别取 $N_i = 20$ 和 $N_i = 56$ ($i = 1, 2$), 得到很好的精度.

表 2 Maxwell 方程弱间断解 FDTD-IDM 和 MLT 方法的误差

FDTD-IDM ^[5]		MLT			
L^2 - 误差 (E_z)	L^2 - 误差 (H_y)	$\mathbb{E}_2(E_z)$	$\mathbb{E}_2(H_y)$	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$
$t = \pi, \tau = \pi \times 10^{-4}, \omega \approx 5.07218116182516$					
$M = 8, N = 50$					
4.34e-12	5.52e-12	1.78e-12	2.36e-12	1.80e-12	5.95e-12
$t = \pi/2, \tau = \pi/5 \times 10^{-4}, \omega \approx 36.48810769772309$					
$M = 8, N = 200$					
6.06e-10	8.19e-10	2.69e-11	3.40e-11	2.73e-11	4.07e-11

表 3 Maxwell 方程间断解 MLT 方法在 $t = 1$ 时的离散 L^∞ - 误差

$\omega \approx 5.05589071456588$					
τ	(N_1, N_2)	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	误差阶	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$	误差阶
1e-02	(20, 20)	6.53e-07		8.26e-07	
1e-03	(20, 20)	6.53e-11	$\tau^{4.00}$	8.49e-11	$\tau^{3.99}$
$\omega \approx 36.47181725046381$					
τ	(N_1, N_2)	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	误差阶	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$	误差阶
1e-03	(56, 56)	1.28e-06		1.61e-06	
1e-04	(56, 56)	1.28e-10	$\tau^{4.00}$	1.66e-10	$\tau^{3.99}$
$\omega \approx 36.47181725046381$					
1e-04	(48, 48)	8.59e-09		1.51e-07	
1e-04	(56, 56)	1.28e-10	$M^{-27.31}$	1.66e-10	$M^{-44.21}$

例 2. 交界处有跳跃条件 (3.1), 解有间断的情况. 波数 ω 满足

$$(1 + (\epsilon_2 - 1) \cos^2 \theta) \tan(\omega) = -\sqrt{\epsilon_2} \tan(\sqrt{\epsilon_2} \omega).$$

图 2 是 $\omega \approx 5.05589071456588$, $t = \pi$ 时真解的图像, 从中可见解 E_z 在交界处是间断的. 表 3 给出多区域 Legendre tau 方法在 $t = 1$ 时的离散 L^∞ - 误差. 与例 1 的取法相同, 显示出时间逼近仍具有四阶精度, 空间逼近具有谱精度. 表 4 给出与 FDTD-IDM 方法^[5]的比较, 对 $\omega \approx 5.05589071456588$ 和 $\omega \approx 36.47181725046381$, 分别取与例 1 中相同的离散参数, 可以看出, 本文 MLT 方法采用相对较低的空间分辨率就能得到很好的精度.

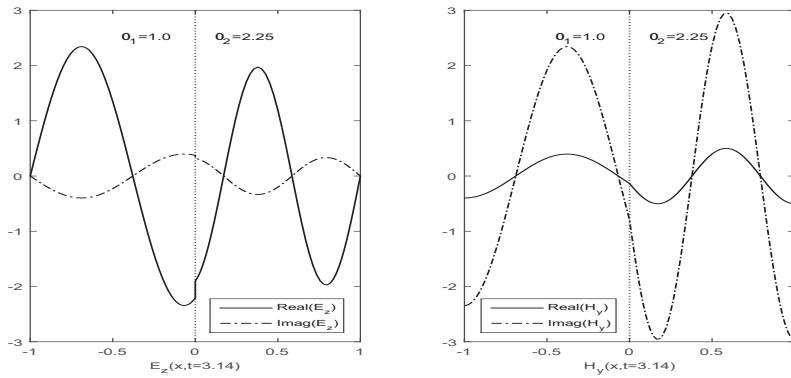
图 2 Maxwell 方程的间断解 (E_z 在 $x = 0$ 处有跳跃)

表 4 Maxwell 方程间断解 FDTD-IDM 和 MLT 方法的误差

FDTD-IDM [5]		MLT			
L^2 -误差 (E_z)	L^2 -误差 (H_y)	$\mathbb{E}_2(E_z)$	$\mathbb{E}_2(H_y)$	$\mathbb{E}_\infty(E_z)$	$\mathbb{E}_\infty(H_y)$
$t = \pi, \tau = \pi \times 10^{-4}, \omega \approx 5.05589071456588$					
$M = 8, N = 50$		$N_1 = N_2 = 20$			
4.65e-12	5.73e-12	1.87e-12	2.39e-12	2.01e-12	5.65e-12
$t = \pi, \tau = \pi/5 \times 10^{-4}, \omega \approx 36.47181725046381$					
$M = 8, N = 200$		$N_1 = N_2 = 56$			
6.16e-10	8.19e-10	5.79e-11	7.12e-11	6.25e-11	8.06e-11

5. 小结

本文采用多区域 Legendre tau 方法求解一维非一致介质 Maxwell 方程, 对于不同介质交界处连接条件分别为连续和跳跃两种情况, 证明了半离散格式满足能量守恒性质, 并获得最优阶误差估计, 改进了原有的相关结果^[8]. 数值算例分别给出了解在不同介质交界处出现弱间断和间断的计算结果, 显示出方法保持了谱精度, 并与 FDTD-IDM 方法^[5]的计算结果进行了比较. 本文提出的多区域 Legendre tau 方法可以推广应用到数值求解高维 Maxwell 方程. 但对于不规则交界面的情况, 谱方法的应用还有许多问题需要进一步研究^[3].

参 考 文 献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1966, 14(3): 302–307.
- [2] Driscoll T A, Fornberg B. A block pseudospectral method for Maxwell's equations. I. One-dimensional case [J]. J. Comput. Phys., 1998, 140(1): 47–65.
- [3] Driscoll T A, Fornberg B. Block pseudospectral methods for Maxwell's equations. II. Two-dimensional, discontinuous-coefficient case [J]. SIAM J. Sci. Comput., 1999, 21(3): 1146–1167.

- [4] Namiki T. A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method [J]. *Microwave Theory & Techniques IEEE Transactions on*, 1999, 47(10): 2003–2007.
- [5] Zhao S, Wei G W. High-order FDTD methods via derivative matching for Maxwell's equations with material interfaces [J]. *J. Comput. Phys.*, 2004, 200(1): 60–103.
- [6] Chen W, Li X, Liang D. Energy-conserved splitting FDTD methods for Maxwell's equations [J]. *Numer. Math.*, 2008, 108(3): 445–485.
- [7] Chen W, Li X, Liang D. Energy-conserved splitting finite-difference time-domain methods for Maxwell's equations in three dimensions [J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2010, 48(4): 1530–1554.
- [8] Zeng F, Ma H, Liang D. Energy-conserved splitting spectral methods for two dimensional Maxwell's equations [J]. *J. Comput. Appl. Math.*, 2014, 265: 301–321.
- [9] Ma H, Qin Y, Ou Q. Multidomain Legendre-Galerkin Chebyshev-collocation method for one-dimensional evolution equations with discontinuity [J]. *Appl. Numer. Math.*, 2017, 111: 246–259.
- [10] Canuto C, Hussaini M Y, Quarteroni A, Zang T A. Spectral methods[M]. Scientific Computation. Springer, Berlin, 2007. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics.
- [11] Guo B, Sun T, Zhang C. Spectral and spectral element methods for high order problems with mixed boundary conditions [J]. *J. Comput. Math.*, 2014, 32(4): 392–411.
- [12] Wang Z, Mu J. A multiple interval Chebyshev-Gauss-Lobatto collocation method for ordinary differential equations [J]. *Numer. Math. Theory Methods Appl.*, 2016, 9(4): 619–639.
- [13] Ji Y, Wu H, Ma H, Guo B. Multidomain pseudospectral methods for nonlinear convection-diffusion equations [J]. *Appl. Math. Mech. (English Ed.)*, 2011, 32(10): 1255–1268.
- [14] Bernardi C, Maday Y. Polynomial interpolation results in Sobolev spaces [J]. *J. Comput. Appl. Math.*, 1992, 43(1-2): 53–80.
- [15] Schwab C. *p-* and *hp*-finite element methods[M]. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [16] Ditkowski A, Dridi K, Hesthaven J S. Convergent Cartesian grid methods for Maxwell's equations in complex geometries [J]. *J. Comput. Phys.*, 2001, 170(1): 39–80.