

# Symm 积分方程数值求解的 RRGMRES 方法<sup>\*1)</sup>

闵 涛 陈胜南  
(西安理工大学理学院 西安 710054)

## 摘要

Symm 积分方程在位势理论中具有重要应用, 它是 Hadamard 意义下的不适定问题. 本文在 Symm 积分方程离散化的基础之上, 提出了求解 Symm 积分方程的 RRGMRES 方法, 给出了数值模拟, 并与相关文献中所提方法进行了分析比较. 结果表明本文提出的方法在求解 Symm 积分方程时具有计算精度高和抗干扰强的优点.

**关键词:** Symm 积分方程; 不适定问题; RRGMRES 方法

**MR (2010) 主题分类:** 45B05

## RRGMRES METHOD OF NUMERICAL SOLUTION FOR SYMM INTEGRAL EQUATION

Min Tao Chen Shengnan

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

## Abstract

Symm Integral Equation has an important application in potential theory, which is an ill posed problem in the sense of Hadamard. Based on the discretization of Symm Integral Equation, we propose a RRGMRES method to solve Symm Integral Equation, gives the numerical simulation, and the methods proposed in the related literature are analyzed and compared, the results show that the method proposed in this paper is to solve the Symm Integral Equation has the advantages of high precision and strong anti-interference.

**Keywords:** Symm Integral Equation; Ill posed problem; RRGMRES method

**2010 Mathematics Subject Classification:** 45B05

## 1. 引言

考察 Symm 积分方程

$$(AZ)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\gamma(x) - \gamma(s)| z(s) ds = g(x) \quad x \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

其中  $\gamma(x)$  为边界参数方程,  $x \in [0, 2\pi]$ , 右端项函数  $g(x)$  与位势方程的边界条件有关. Symm 积分方程归属于第一类 Fredholm 积分方程, 它在 Dirichlet 条件下求解 Laplace 方程中具有

\* 2017 年 6 月 6 日收到.

<sup>1)</sup> 基金项目: 国家自然科学基金 (51679186); 青年科学基金 (11601418).

重要作用<sup>[1-3]</sup>. 该方程的特点是积分核具有弱奇异性, 由于此类问题的不适定性, 给数值求解带来很大困难. 目前众多学者对该积分方程进行了深入的研究. Mclean W 等人提出了用配置法求解积分方程的方法<sup>[4]</sup>; Reifenberg M 等人提出了衰减因子法求解 Symm 积分方程<sup>[5]</sup>; 本文作者提出了 Symm 积分方程的信赖域 Lanczos 法和正则化 Gmres 方法<sup>[6,7]</sup>; 李徘菱等人提出了 Symm 积分方程的快速 Fourier 配置法<sup>[8]</sup>; 吴颉尔、戴华等提出了用正则化 MINRES 方法求解 Symm 积分方程<sup>[9]</sup>; 吴颉尔、吴天理提出了用正则化 Symmlq 方法求解 Symm 积分方程<sup>[10]</sup>.

本文在 Symm 积分方程离散化的基础上, 运用 RRGMRES 方法(值域限制的广义极小残量算法)求解这类不适定问题, 数值试验表明该方法能快速反演积分方程的解, 与文献[9]和[10]的方法相比, 该方法具有计算精度高, 数值反演速度快和抗干扰强的特点.

## 2. Symm 积分方程离散化

为了有效的求出 Symm 积分方程的数值解, 首先将 Symm 积分方程进行离散化. 若当  $\gamma(x)$  是一般的光滑闭曲线时, 经推导, 有

$$(AZ)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(4 \sin^2 \frac{x-s}{2}) z(s) ds + \int_0^{2\pi} k(x, s) z(s) ds \quad (2)$$

其中核函数

$$k(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\gamma(x) - \gamma(s)|^2}{4 \sin^2 \frac{x-s}{2}} & x \neq s \\ -\frac{1}{\pi} \ln |\gamma'(x)| & x = s \end{cases} \quad (3)$$

用节点  $x_j = \frac{j\pi}{n}, j = 0, 1, \dots, 2n-1$  离散区间  $[0, 2\pi]$  后, 对于(2)式中第一个弱奇性的积分项, 用三角插值多项式, 即

$$Q_n z = \sum_{j=1}^{2n} z(x_j) L_j$$

代替  $z_j$  到  $2n$  维空间

$$\sum_{j=0}^n a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \sin(jx) \quad a_j, b_j \in R$$

从而有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(s) \ln(4 \sin^2 \frac{x-s}{2}) ds &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Q_n z)(s) \ln(4 \sin^2 \frac{x-s}{2}) ds \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} z(x_j) R_j(x) \quad x \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

其中  $R_j(x)$  权函数为

$$\begin{aligned} R_j(x) &= -\frac{1}{2\pi} L_j(s) \ln(4 \sin^2 \frac{x-s}{2}) ds \\ &= \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2n} \cos n(x - x_j) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(x - x_j) \right] \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1 \end{aligned}$$

再用矩形公式计算 (2) 式中第二个光滑积分项, 即

$$\int_0^{2\pi} k(x, s)z(s)ds \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} k(x, x_j)z(x_j) \quad x \in [0, 2\pi]$$

可得算子  $A$  的近似为

$$(A_n Z)(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} z(x_j)[R_j(x) + \frac{\pi}{n}k(x, x_j)] \quad x \in [0, 2\pi] \quad (4)$$

该逼近的详细推导见文献 [1, 2]. 可以证明对任意的  $2\pi$  周期连续函数  $z$ ,  $(A_n Z)(x)$  一致收敛于  $(AZ)(x)$ . 利用上述推导, 可以将方程 (1) 离散, 写成矩阵形式为

$$Az = b \quad (5)$$

其中矩阵  $A$  与  $b$  的元素分别为

$$\begin{aligned} a_{ij} &= R_{|i-j|} + \frac{\pi}{n}k(x_i - x_j), R_l = \frac{1}{n}\left\{\frac{(-1)^l}{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \frac{ml\pi}{n}\right\}, i, j = 0, 1, \dots, 2n-1. \\ k(x, s) &= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\gamma(x) - \gamma(s)|}{4 \sin^2 \frac{x-s}{2}}, x \neq s, k(x, x) = -\frac{1}{\pi} \ln |\gamma'(x)|, x \in [0, 2\pi]. \\ b_j &= g(x_j), j = 0, 1, \dots, 2n-1. \end{aligned}$$

由于 (1) 是第一类 Fredholm 积分方程, 导致离散所得系统式 (5) 是线性离散不适定问题, 同时注意到在实际应用中, 右端项  $b$  会受白噪声  $\varepsilon$  扰动, 即  $b^\varepsilon = b + \varepsilon$ ,  $b$  是理想状态下的输出数据,  $\varepsilon$  是实际中无法避免的噪音数据, 通常被认为独立并满足期望为 0 的高斯分布. 因此真正要求解的线性系统为

$$Az = b^\varepsilon \quad (6)$$

对于大规模不适定问题 (6), 人们将正则化方法和 Krylov 子空间方法相结合, 可产生迭代正则化方法. 本文考虑用 RRGMRES 方法求解不适定系统 (6), 分析该方法在求解 Symm 积分方程的可行性及有效性.

### 3. RRGMRES 方法

RRGMRES 方法是广义极小残量 (GMRES) 方法的一个变型方法<sup>[11]</sup>, 其特点是用于求解离散不适定问题中的线性系统. 与大多数迭代正则化方法一样, 有着半收敛的性质, 即受噪声的影响, 正则化解的相对误差随着迭代次数的增加很快下降到最小但随后开始迅速增加<sup>[12]</sup>.

考虑线性离散不适定问题 (6) 和矩阵  $A$ . 设初始迭代解  $z^{(0)} = 0$ , 求迭代解  $z^{(k)}$ , 转化为求最小化问题

$$\min_{z \in K_k(A, Ab^\varepsilon)} \|Az - b^\varepsilon\| \quad (7)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示欧氏向量范数.Krylov 子空间为

$$K_k(A, Ab^\varepsilon) = \text{span}\{Ab^\varepsilon, A^2b^\varepsilon, \dots, A^kb^\varepsilon\} \quad k \geq 1$$

由于  $z^{(k)} \in K_k(A, Ab^\epsilon)$  是在  $A$  的值域内, 故该方法称为限制值域的广义极小残量法. 利用 Arnoldi 过程来求解最小值问题 (7), 应用第  $k$  步的 Arnoldi 过程和初始向量  $v_1 = b^\epsilon / \|b^\epsilon\|$  得出 Arnoldi 分解

$$AV_k = V_{k+1} \bar{H}_k \quad (8)$$

其中  $V_{k+1} = [v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}] \in R^{m \times (k+1)}$  是列正交的, 并假定迭代数  $k$  的维数较小. 当  $\dim(K_{k+1}(A, b)) \leq k$  时, Arnoldi 过程终止. (8) 式中  $\bar{H}_k \in R^{(k+1) \times k}$  是上 Hessenberg 形式的非零次对角项. 分解 (8) 式是最常见的标准 GMRES 算法.

下面引入 QR 分解

$$\bar{H}_k = Q_{k+1} \bar{R}_k \quad (9)$$

其中  $Q_{k+1} \in R^{(k+1) \times (k+1)}$  是正交的上 Hessenberg 矩阵,  $\bar{R}_k \in R^{(k+1) \times k}$  是上三角矩阵. 令  $W_k \in R^{m \times k}$  为  $V_{k+1} Q_{k+1}$  的第  $k$  列, 则有

$$AV_k = W_k R_k$$

假设线性方程组 (6) 的第  $k$  个近似解为  $z^{(k)} \in K^{(k)}(A, Ab^\epsilon)$ , 残差为  $r^{(k)} = b^\epsilon - Az^{(k)}$ , 则  $z^{(k)}$  可以表示为

$$z^{(k)} = W_k y, y \in R^k \quad (10)$$

因此, (7) 式的最小化问题可以写成

$$\begin{aligned} \min_{z \in K_k(A, Ab^\epsilon)} \|Az - b^\epsilon\| &= \min_{y \in R^k} \|AW_k y - b^\epsilon\| \\ &= \min_{y \in R^k} \|A(AV_k)R_k^{-1}y - b^\epsilon\| \\ &= \min_{y \in R^k} \|AV_{k+1}\bar{H}_k R_k^{-1}y - b^\epsilon\| \\ &= \min_{y \in R^k} \|V_{k+2}\bar{H}_{k+1}Q_{k+1}\bar{I}_k y - b^\epsilon\| \\ &= \min_{y \in R^k} \|\bar{H}_{k+1}Q_{k+1}\bar{I}_k y - \|b^\epsilon\|e\| \end{aligned}$$

其中  $y$  是上式问题的解,  $V_{k+2}e = b^\epsilon / \|b^\epsilon\|$ . 那么, RRGMRES 方法得到的 (6) 式的解为

$$z^{(k)} = W_k y, y = (V_{k+1})^T (\bar{H}_k)^T b^\epsilon$$

由于  $\bar{H}_{k+1}, Q_{k+1}$  是上 Hessenberg 形式的, 则矩阵

$$\tilde{H}_k = \bar{H}_{k+1}Q_{k+1}\bar{I}_k \in R^{(k+2) \times k}$$

QR 分解为

$$\tilde{H}_k = Q'_{k+2} \tilde{R}'_k$$

其中  $Q'_{k+2} \in R^{(k+2) \times (k+2)}$  是正交的,  $\tilde{R}'_k \in R^{(k+2) \times k}$  是上三角矩阵. 则

$$\min_{y \in R^k} \|AW_k y - b^\epsilon\| = \min_{y \in R^k} \|\tilde{R}'_k y - (Q'_{k+2})^T \|b^\epsilon\| e\| \quad (11)$$

若  $b$  的误差  $\varepsilon$  的范数是已知的, 记为  $\delta$ , 由偏差原理可知, 由 RRGMRES 方法进行迭代直至求得的迭代解  $z^{(k)}$  需满足

$$\|Az^{(k)} - b\| \leq \delta \quad (12)$$

此时迭代结束. 具体讨论见文献 [13].

若  $b$  的误差  $\varepsilon$  的范数是未知的, 需使用另一停止准则, 即基于 L- 曲线和广义交叉验证 (GCV) 的停止准则. 具体讨论见文献 [14].

#### 4. 数值模拟

为了验证上述方法的可行性, 下面给出数值模拟, 模拟时不妨假设真解  $z$  已知,  $b$  可通过离散线性系统  $Az = b$  获得, 并对  $b$  进行扰动  $\varepsilon$ , 即

$$b^\varepsilon = b + \varepsilon \cdot \text{rand}(b)$$

其中  $\text{rand}(b)$  为分布在  $[0, 1]$  之间的随机数. 作为比较, 解的相对误差公式为

$$\delta = \|\text{准确解} - \text{近似解}\|_2 / \|\text{准确解}\|_2$$

**模拟 1:** 取边界参数方程  $\gamma(x) = (\cos x, 2 \sin x)$ , 真解取为  $z(s) = e^{3 \sin(s)}$ , 离散点  $n = 50$ , 表 1 给出了当  $\varepsilon = 0$  时解的相对误差随迭代次数的变化情况.

表 1 解的相对误差随迭代次数的变化情况

迭代次数	解的相对误差	迭代次数	解的相对误差
5	0.0721046908224012	55	1.35449598144189e-011
10	0.00308732675708631	60	1.79088229533993e-013
15	0.000820629524709896	65	4.51745647956735e-010
20	0.000638176817114345	70	4.49035985145957e-005
25	0.000484598034413348	75	45.1575382253282
30	0.000408108849690415	80	51.0404747749553
35	0.000359636973839153	85	51.0399834516602
40	0.000193514949920674	90	221.977963357786
45	4.83170384454996e-005	95	221.9779651419
50	1.23670828491573e-007	100	221.917375941936

由表 1 可以看出, 解的相对误差随着迭代次数的增加逐渐下降到最小, 但随后又突然增加, 体现了该方法具有半收敛性. 实际运用中, 可通过给定 (12) 式中的  $\delta$  选定最佳的迭代次数, 在本例中, 可取第 60 次迭代时的解  $z^{(60)}$  作为近似解, 效果达到最优.

下面取不同的噪声水平  $\varepsilon$  进行计算, 图 1、图 2 和图 3 分别给出了迭代次数为 15 时  $\varepsilon = 0.1$ 、 $\varepsilon = 0.01$  和  $\varepsilon = 0.001$  时的真解与数值解的比较结果. 与文献 [9] 中的正则化 MINRES 方法和文献 [10] 中的正则化 Symmlq 方法结果比较见表 2.

表 2 计算结果相对误差的比较

$\ \varepsilon\ $	正则化 MINRES 方法	正则化 Symmlq	RRGMRES 方法
0.1	0.017	0.01769	0.00259
0.01	0.004	0.00179	0.00051
0.001	0.00024	0.00032	0.00008

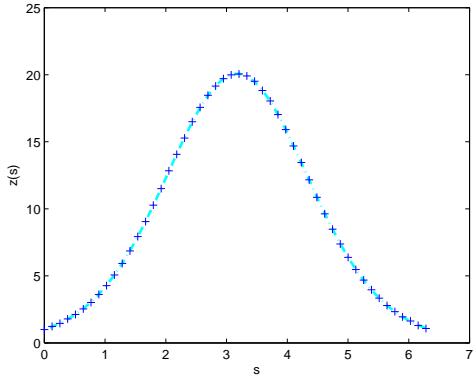
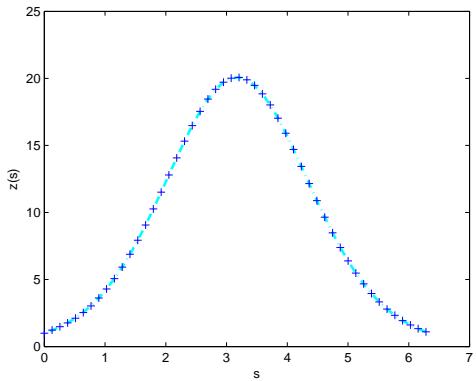
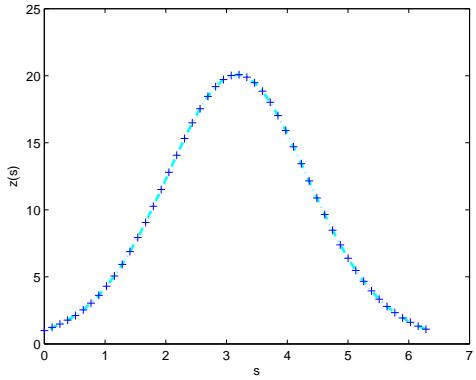
图 1  $\varepsilon = 0.1$  时真解与数值解的比较图 2  $\varepsilon = 0.01$  时真解与数值解的比较图 3  $\varepsilon = 0.001$  时真解与数值解的比较

图 1、图 2、图 3 中虚线代表数值解，加号代表真解。由表 2 可以看出，RRGMRES 反演精度在数据有噪声时要高出正则化 MINRES 方法和正则化 Symmlq 方法的一个数量级，另外，正则化 MINRES 方法和正则化 Symmlq 方法在计算时需确定合适的正则化参数，而本文方法在求解过程中无须确定此参数，减少了计算量。

**模拟 2：**取边界参数方程  $\gamma(x) = (\cos x, 2 \sin x)$ ，真解取为  $z(s) = 1$ ，离散点  $n = 50$ ，表 3

和表 4 分别给出了当  $\varepsilon = 0$  时解的相对误差随迭代次数的变化情况.

表 3 解的相对误差随迭代次数的变化情况

迭代次数	解的相对误差	迭代次数	解的相对误差
5	0.00637692199253487	55	2.39661155654468e-010
10	0.00318302056066095	60	5.95968086357517e-008
15	0.00229890611638727	65	0.000440874595362013
20	0.00171329627335163	70	57.5820612120913
25	0.00151743276288116	75	57.6725522408538
30	0.00111813517787922	80	57.6695037271172
35	8.11082584842846e-006	85	70.7197823531504
40	1.29297389936124e-008	90	70.7197838398906
45	1.89996384925062e-011	95	72.742646760311
50	8.01302550213189e-012	100	72.7426196364391

由表 3 可知, 解的相对误差随着迭代次数的增加逐渐下降到最小, 但随后又突然增加, 进一步验证该方法的半收敛性. 在本例中可取第 50 次迭代时的解  $z^{(50)}$  作为近似解, 效果达到最优.

下面取不同的噪声水平  $\varepsilon = 0.1$ 、 $\varepsilon = 0.01$  和  $\varepsilon = 0.001$  时进行计算. 与文献 [9] 中的正则化 MINRES 方法和文献 [10] 中的正则化 Symmlq 方法结果比较见表 4.

表 4 计算结果相对误差的比较

$\ \varepsilon\ $	正则化 MINRES 方法	正则化 Symmlq	RRGMRES 方法
0.1	0.0201960	0.019	0.00880786
0.01	0.0019767	0.002	0.00274532
0.001	0.0003364	0.00034	0.00033027

由表 4 可以看出, RRGMRES 反演精度在数据有噪声时总体上要高于正则化 MINRES 方法和正则化 Symmlq 方法, 其平均耗时为 0.3701s, 表明 RRGMRES 方法具有精度高、计算速度快的优点.

## 5. 结 论

本文将 Symm 积分方程问题离散转化为线性离散不适定问题, 结合 Krylov 子空间方法给出了求 Symm 积分方程数值解的 RRGMRES 方法, 并进行了数值模拟, 给出了 RRGMRES 方法与其他几种算法计算的对比结果, 结果表明本文所提出方法对 Symm 积分方程求解具有一定的可行性、有效性.

## 参 考 文 献

- [1] Kirsch A. An Introduction to the Mathematics of Inverse Problems[M]. New York:Springer-Verlag, 1996.
- [2] 肖庭延, 于慎根, 王彦飞. 反问题的数值解法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

- [3] 李功胜, 马逸尘. 应用改进的 Tikhonov 正则化求解 Symm 积分方程的数值分析 [J]. 工程数学学报, 2004, 21(5): 825-828.
- [4] Mclean W, Probdorf S B, Wendland W L. Pointwise error estimates for the trigonometric collocation method applied to singular integral equations and periodic pseudo differential equation[J]. Journal of integral equations and applications, 1989, 2: 125-146.
- [5] Reifenberg M, Berrut J-P. Numerical solution of boundary integral equations by means of attenuation factors[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2000, 20: 25-46.
- [6] 闵涛, 武苗, 卢宏鹏, 等. 求解 Symm 积分方程的信赖域 Lanczos 法 [J]. 数值计算与计算机应用, 2010, 31(4): 253-258.
- [7] 闵涛, 赵苗苗, 胡刚. Symm 积分方程的正则化 Gmres 方法 [J]. 工程数学学报, 2013, 30(2): 271-277.
- [8] 李徘徊, 刘飘飘, 隆广庆. Symm 积分方程的快速 Fourier 配置法 [J]. 广西师范学院学报 (自然科学版), 2014, 31(4): 1-6.
- [9] 吴颤尔, 戴华. 数值求解 Symm 积分方程的正则化 MINRES 方法 [J]. 工程数学学报, 2008, 25(1): 74-80.
- [10] 吴颤尔, 吴天理. 用正则化 Symmlq 方法求解 Symm 积分方程 [J]. 江苏科技大学学报 (自然科学版), 2011, 25(3): 294-298.
- [11] D Calvetti, B Lewis, L Reichel. GMRES-type methods for inconsistent systems[J]. Linear Algebra and its applications, 2001, 316(1): 157-169.
- [12] 仇静, 王正盛. 一种确定 RRGMRES 正则化参数的新方法 [J]. 计算机与网络, 2015, 41(22): 46-49.
- [13] Calvetti D, Lewis B, Reichel L. On the regularizing properties of the GMRES method[J]. Numerische Mathematik, 2002, 91(4): 605-625.
- [14] Hanson P C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems:[M]. SIAM, 1998.