

各向异性扩散方程的高精度算法^{*1)}

宋淑红

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

王双虎

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094;
北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088)

摘要

针对多介质各向异性扩散方程, 本文设计了一种非结构多边形网格高精度有限体积计算格式。为了能适应网格大变形, 在构造格式框架时除了用到单元中心量外还引入了节点量作为中间变量, 并通过推广李生逼近算法于各向异性扩散系数情形消除节点量, 使算法回归于单元中心量计算流程。数值算例表明, 该方法能较好适应大变形网格及间断系数各向异性扩散方程计算。

关键词: 各向异性扩散系数; 李生逼近; 节点量计算方法; 大变形网格

MR (2000) 主题分类: 65N06, 65N15

HIGH ACCURATE COMPUTATION OF DIFFUSION EQUATIONS WITH ANISOTROPIC COEFFICIENTS

Song Shuhong

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Wang Shuanghu

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China;
National Key Laboratory of Computational Physics, Beijing 100088, China)

Abstract

In this paper, a high accurate finite volume method is given for diffusion equations with anisotropic diffusion coefficients on unstructured meshes. In order to deal with distorted meshes, the vertex unknowns are introduced as the middle quantities in the construction of this method besides the cell-centered unknowns. The “twin-fitting” method is applied to computing the vertex unknowns for diffusion equations with anisotropic coefficients, so that the resulting method is solved by the cell-centered unknowns. Numerical experiments show that this method can deal with distorted meshes and anisotropic diffusion coefficient problem.

Keywords: anisotropic diffusion coefficients; “twin-fitting” method; the treatment for the vertex unknowns; distorted meshes

2000 Mathematics Subject Classification: 65N06, 65N15

* 2017 年 4 月 23 日收到。

¹⁾ 基金项目: 国家自然科学基金项目 (11001024, 11501040, u1630247) 资助。

1. 引言

随着科学技术的发展, 数值模拟所采用的物理建模越来越精细。各向异性扩散方程的计算被广泛应用于国防、能源和医疗等领域, 并常常与其他物理模型耦合形成多物理过程。由于其在实际应用中的重要性及在计算中的困难性, 复杂物理过程模拟, 包括辐射流体力学及磁流体力学模拟等, 已经成为大家关注的科学计算核心问题。如何设计适应网格大变形, 并且在物质界面处保持高精度的算法, 是其中的瓶颈问题。

由于复杂物理过程的实际计算常采用分裂算法, 与扩散计算耦合的其他物理过程, 如流体计算过程, 广泛采用中心型的有限体积方法, 所以, 扩散计算也发展了许多中心型的有限体积方法。如果不考虑时间离散, 如何用周围单元中心量高精度逼近单元边界上流的法向分量是扩散方程离散化的关键。目前国内外已发展了多种算法, 这些算法大致可分为两类, 一类是基于变分原理, 包括 Kershaw 格式^[7] 和支撑算子方法^[9] 等方法, 另一类是基于插值技术, 如李德元等人建立的任意多边形网格上的差分格式^[8]、保线性准则的格式^[15,16]、二十一点格式^[17]、Hermeline 格式^[5,6]、多点通量方法^[1-3] 以及李生逼近算法^[10-12] 等。这些方法大多针对各向同性扩散方程, 并对网格大变形问题不能很好适应。特别对于多介质问题, 多数方法在物质界面处的计算精度低。面对此种现状, 我们发展了李生逼近方法^[10-12] 通过保持内蕴连续条件建立了一系列具有全局高精度的一维计算格式, 针对标量形式各向同性扩散系数的扩散方程设计二维格式时, 利用自身处理间断扩散系数问题的优势给出了高精度节点量计算方法, 大大改善了扩散差分格式^[8] 的计算精度。任意多边形网格上的扩散差分格式^[8] 较为广泛应用于实际计算中, 它具有局部模板, 在四边形网格上称为九点格式并当网格正交时退化为五点格式。但其在网格大变形时会失去计算置信度, 并且在多介质界面处的计算精度偏低。由于大变形网格上单元边界流的法向分量的计算一般无法仅用两侧单元中心量给出好的逼近, 引入节点量成为必然, 并且节点量的计算精度在很大程度决定了格式精度。在实际计算中为了简化计算量, 一般采用与节点相邻的单元中心量的线性组合来逼近节点量。关于节点量的计算, 已发展了许多算法。最早采用的是算数平均加权方法^[8] 和权重系数与扩散系数成正比、与单元中心到节点间距成反比的加权方式^[4], 这两个方法由于简单性和在光滑网格上的高精度而在实际计算中被广泛应用, 但在大变形网格上精度迅速降低, 甚至不收敛。近几年发展了一些方法, 主要包括泰勒展开方法^[13,14]、保线性准则方法^[15,16] 和李生逼近方法^[12], 这些算法在面对大变形网格时已经比早期算法有较大改进, 但依然不能让人们满意, 在逐步加大网格变形时精度迅速降低。另外, 上述方法在物质界面的精度偏低, 不能满足越来越高精度模拟的需求。

本文针对多介质各向异性扩散方程, 设计了一种非结构多边形网格高精度有限体积计算格式; 将李生逼近节点量计算方法^[12] 拓展到矩阵形式各向异性扩散系数情形, 即采用不同的线性函数去逼近与节点相邻的三角形子网格上的温度, 再通过保持子网格边上的温度连续和流的法向分量连续以确定节点量, 该方法计算简单并且具有几何含义。

文章的主要内容安排如下: 第 1 部分给出矩阵形式各向异性扩散系数的扩散方程的有限体积方法; 第 2 部分将李生逼近节点量计算方法^[12] 发展到矩阵形式各向异性扩散系数的扩散方程; 第 3 部分通过数值算例测试最终的有限体积方法; 最后对本文的内容进行了总结。

2. 有限体积方法

考虑如下扩散问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u) + R, & t \in [0, \infty), (x, y) \in \Omega \\ \alpha u + \beta K \nabla u \cdot \mathbf{n} = \psi, & (x, y) \in \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 是 R^2 空间中的有界多边形区域, \mathbf{n} 是其边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, K 是矩阵形式的系数, $R, u_0, \alpha, \beta, \psi$ 是给定的函数. 在热扩散问题中, u 一般表示温度, K 是扩散系数, $F = -K \nabla u$ 表示流. 在问题 (1) 中初始条件由 $u_0(x, y)$ 给出, 边界条件的表达式中, $\alpha \neq 0, \beta = 0$ 时为 Dirichlet 边界条件, $\alpha = 0, \beta \neq 0$ 时为 Neumann 边界条件, $\alpha \beta \neq 0$ 时为混合边界条件.

本节给出区域 Ω 的任意多边形网格剖分上扩散方程 (1) 的一个有限体积方法. 设中心为 O_L 的单元和中心为 O_R 的单元相交于边 $\gamma = \overrightarrow{AB}$, 如图 1 所示. 在单元 O_L 上对扩散方程 (1) 两边积分, 并记 $u_L = \frac{1}{V_L} \int_{O_L} u dx dy$ 为单元 O_L 上的平均温度, V_L 表示单元面积, 则有

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} = -\frac{1}{V_L} \int_{\partial O_L} F \cdot \mathbf{n}_L ds + R_L, \quad (2)$$

其中 \mathbf{n}_L 为单元 O_L 的单位外法向量. 令 u_L 为单元中心未知量, 则离散 (2) 式的关键是如何逼近网格边上流的法向分量. 下面以边 γ 上流的法向分量 $\int_{\gamma} F \cdot \mathbf{n}_{AB} ds$ 为例具体介绍离散方法.

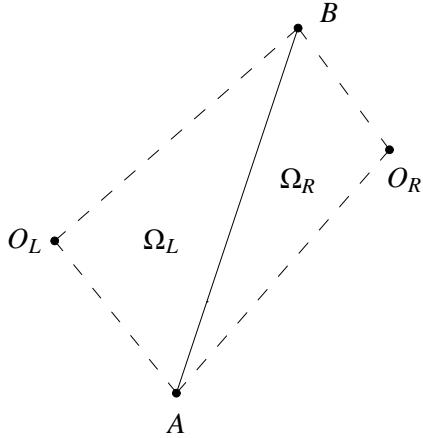


图 1 边 γ 周围的网格

温度连续和流的法向分量连续是扩散方程的内蕴连续条件. 由于温度连续, 许多方法采用单个多项式逼近边 γ 两侧的温度, 而基于流的法向分量连续, 得到间断扩散系数处温度的梯度间断. 李生逼近方法分别采用两个多项式逼近边 γ 两侧的温度, 通过局部模板上给定的温度值和边 γ 上的内蕴连续条件确定多项式, 得到流的法向分量.

下面先给出一些记号. 令

$$\mathbf{n}_{AB} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|AB|} \begin{pmatrix} y_B - y_A \\ x_A - x_B \end{pmatrix},$$

它是 \mathbf{n}_L 在边 γ 上的限制, $R(\overrightarrow{AB}) = \mathbf{n}_{AB} |AB|$.

线性函数 $p_L(x, y)$ 和 $p_R(x, y)$ 分别用于逼近三角形 $\Delta O_L AB$ 和 $\Delta O_R AB$ 上的温度, 它们是由其上的面积坐标基函数组合成的. 即

$$\begin{aligned} p_L(x, y) &= u_A q_A^L(x, y) + u_B q_B^L(x, y) + u_L q_L^L(x, y), \\ p_R(x, y) &= u_A q_A^R(x, y) + u_B q_B^R(x, y) + u_R q_R^R(x, y), \end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned} \nabla q_A^L &= \frac{R(\overrightarrow{O_L B})}{S_L}, \quad \nabla q_B^L = \frac{R(\overrightarrow{AO_L})}{S_L}, \quad \nabla q_L^L = \frac{R(\overrightarrow{BA})}{S_L}, \quad S_L = \overrightarrow{O_L A} \cdot R(\overrightarrow{O_L B}), \\ \nabla q_A^R &= \frac{R(\overrightarrow{BO_R})}{S_R}, \quad \nabla q_B^R = \frac{R(\overrightarrow{OR_A})}{S_R}, \quad \nabla q_R^R = \frac{R(\overrightarrow{AB})}{S_R}, \quad S_R = \overrightarrow{O_R A} \cdot R(\overrightarrow{BO_R}), \end{aligned}$$

于是, 函数 $p_L(x, y)$ 和 $p_R(x, y)$ 不仅满足局部模板 $\Delta O_L AB$ 和 $\Delta O_R AB$ 上的温度值, 而且保持了边 γ 上的温度连续条件. 当温度值 u_A 和 u_B 由独立参数 $\alpha = \frac{u_A+u_B}{2}$ 和 $\beta = \frac{u_B-u_A}{2}$ 表示时, 由边 γ 上流的法向分量连续可得到参数 α . 事实上,

$$\begin{aligned} F_{AB}^L &= -K_L \nabla p_L(x, y) \cdot R(\overrightarrow{AB}) = -\nabla p_L(x, y) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{1}{S_L} \left[(\alpha - u_L) R(\overrightarrow{AB}) + \beta \left(R(\overrightarrow{AO_L}) + R(\overrightarrow{BO_L}) \right) \right] \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_{AB}^R &= -K_R \nabla p_R(x, y) \cdot R(\overrightarrow{AB}) = -\nabla p_R(x, y) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB}) \\ &= -\frac{1}{S_R} \left[(u_R - \alpha) R(\overrightarrow{AB}) + \beta \left(R(\overrightarrow{OR_A}) + R(\overrightarrow{OB_R}) \right) \right] \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB}), \end{aligned} \quad (4)$$

若 $F_{AB}^L = F_{AB}^R$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\frac{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB})}{S_L} + \frac{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB})}{S_R}} \left[\frac{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB})}{S_R} u_R + \frac{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB})}{S_L} u_L \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(\frac{1}{S_R} \left(R(\overrightarrow{OR_A}) + R(\overrightarrow{OB_R}) \right) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB}) - \frac{1}{S_L} \left(R(\overrightarrow{AO_L}) + R(\overrightarrow{BO_L}) \right) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB}) \right) \right], \end{aligned}$$

将上式 α 带入 (3) 或者 (4), 从而边 γ 上流的法向分量近似为

$$F_{AB}^L = F_{AB}^R = \tilde{K} [u_L - u_R + D(u_B - u_A)], \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \frac{1}{\frac{S_L}{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB})} + \frac{S_R}{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB})}}, \\ D &= \frac{\frac{R(\overrightarrow{AO_L}) + R(\overrightarrow{BO_L})}{2} \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB})}{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_R^T R(\overrightarrow{AB})} + \frac{\frac{R(\overrightarrow{OR_A}) + R(\overrightarrow{OB_R})}{2} \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB})}{R(\overrightarrow{AB}) \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB})}, \end{aligned} \quad (6)$$

对于内边 γ , 其上流的法向分量由 (5) 和 (6) 式逼近. 对于 Dirichlet 边界上的边 γ , 有

$$F_{AB}^L = -\frac{1}{S_L} \left[u_A R(\overrightarrow{O_L B}) + u_B R(\overrightarrow{AO_L}) - u_L R(\overrightarrow{AB}) \right] \cdot K_L^T R(\overrightarrow{AB}), \quad (7)$$

则 (7) 式给出了其上流的法向分量的逼近公式.

若时间采用隐式离散, 则方程 (2) 的离散化为

$$\frac{u_L^{n+1} - u_L^n}{\Delta t} = -\frac{1}{V_L} \tilde{F}_{\partial O_L}^{n+1} + R_L, \quad (8)$$

其中 Δt 为时间步长, u_L^n 是时刻 $n\Delta t$ 时 u_L 的值, $\tilde{F}_{\partial O_L}$ 表示 ∂O_L 上边的数值流的法向分量, 由 (5), (6) 式或 (7) 式给出. 于是, 对于矩阵形式各向异性扩散系数的扩散方程, 通过孪生逼近

方法, 得到了任意多边形网格上的扩散差分格式 (8), 并且在各向同性扩散系数情形, 格式 (8) 退化为文 [8] 中的扩散差分格式.

在实际计算中, 节点量用周围单元中心量线性表出, 则格式 (8) 在一般四边形网格上是九点格式, 在正交网格上退化为五点格式, 其精度最终由节点量的计算精度来确定.

3. 孪生节点量计算方法

本节利用在处理间断扩散系数问题上具有高精度优势的孪生逼近方法, 将文 [12] 中计算标量形式各向同性扩散系数的孪生节点量计算方法发展到多边形非结构网格上计算矩阵形式各向异性的扩散系数.

考虑 N 条网格边相交于同一个节点情况 (见图 2). 设节点量为 u_0 , 则它表示为周围 N 个单元中心量 u_1, u_2, \dots, u_N 的加权线性组合, 即

$$u_0 = \sum_{i=1}^N w_i u_i,$$

其中 w_i 为单元中心量 u_i 的权重. 一般要求上式对常数解首先成立, 于是 $\sum_{i=1}^N w_i = 1$.

关于节点量的计算, 首先考虑节点周围辐射场的性质, 包括温度连续和流的法向分量连续. 其次, 节点周围的扩散系数在温度变化剧烈时是作为间断系数来处理的. 而对于标量形式的间断各向同性扩散系数, 孪生逼近方法已证实能对流的法向分量^[10,11] 和节点量^[12] 进行高精度的逼近. 本节将文 [12] 中孪生节点量计算方法发展为各向异性扩散系数情形, 即采用不同的线性函数去逼近与节点相邻的三角形子网格上的温度, 局部模板上给定的温度值和扩散方程的内蕴连续条件用于确定多项式.

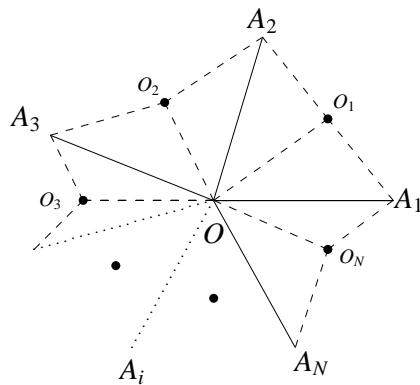


图 2 关于节点计算的局部剖分图

具体地, 如图 2 所示, $O(0,0)$ 和 $A_k(x_k, y_k)(1 \leq k \leq N)$ 分别是节点及其与之相邻的节点局部坐标, $O_k(s_k, r_k)(1 \leq k \leq N)$ 是周围单元中心的局部坐标, 新的孪生节点量计算方法步骤如下:

首先, 在每个单元 $O_k(s_k, r_k)(1 \leq k \leq N)$ 上, 三角形 $\Delta OO_k A_{k+1}$ 和 $\Delta OO_k A_k$ 上有面积

坐标基函数可形成两个分片线性多项式 $p_{k,l}(x, y)$ 和 $p_{k,r}(x, y)$ 来逼近其上的温度,

$$\begin{aligned} p_{k,l}(x, y) &= u_O q_{k,l}^O(x, y) + u_k q_{k,l}(x, y) + u_{A_{k+1}} q_{k,l}^{A_{k+1}}(x, y) \\ &= u_O + (u_k - u_O) q_{k,l}(x, y) + (u_{A_{k+1}} - u_O) q_{k,l}^{A_{k+1}}(x, y), \\ p_{k,r}(x, y) &= u_O q_{k,r}^O(x, y) + u_k q_{k,r}(x, y) + u_{A_k} q_{k,r}^{A_k}(x, y) \\ &= u_O + (u_k - u_O) q_{k,r}(x, y) + (u_{A_k} - u_O) q_{k,r}^{A_k}(x, y), \end{aligned}$$

其中 k 依次轮流取值 $1, 2, \dots, N$, 则这几个基函数的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla q_{k,l}(x, y) &= \frac{R(\overrightarrow{OA_{k+1}})}{2S_{k,l}}, \quad \nabla q_{k,l}^{A_{k+1}}(x, y) = \frac{R(\overrightarrow{O_k O})}{2S_{k,l}}, \quad 2S_{k,l} = s_k y_{k+1} - r_k x, \\ \nabla q_{k,r}(x, y) &= \frac{R(\overrightarrow{OA_k})}{2S_{k,r}}, \quad \nabla q_{k,r}^{A_k}(x, y) = \frac{R(\overrightarrow{O_k O})}{2S_{k,r}}, \quad 2S_{k,r} = s_k y_k - r_k x_k. \end{aligned}$$

其次, 用最小二乘法保持边 $\overrightarrow{OA_k}$ ($1 \leq k \leq N$) 两侧流的法向分量连续, 以此来确定温度 $u_{A_{k+1}} - u_O$, 即要求

$$\min_{u_{A_1}, \dots, u_{A_N}} S, \quad S = \sum_{k=1}^N S_k^2 \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} S_k &= -\nabla p_{k,r} \cdot K_k^T R(\overrightarrow{OA_k}) + \nabla p_{k-1,l} \cdot K_{k-1}^T R(\overrightarrow{OA_k}) \\ &= (u_k - u_O) g_k - (u_{k-1} - u_O) w_k + (u_{A_k} - u_O) (v_k - t_k), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} g_k &= -\nabla q_{k,r} \cdot K_k^T R(\overrightarrow{OA_k}) = -\frac{R(\overrightarrow{OA_k}) \cdot K_k^T R(\overrightarrow{OA_k})}{2S_{k,r}}, \\ v_k &= -\nabla q_{k,r}^{A_k} \cdot K_k^T R(\overrightarrow{OA_k}) = -\frac{R(\overrightarrow{O_k O}) \cdot K_k^T R(\overrightarrow{OA_k})}{2S_{k,r}}, \\ w_k &= -\nabla q_{k-1,l} \cdot K_{k-1}^T R(\overrightarrow{OA_k}) = -\frac{R(\overrightarrow{OA_k}) \cdot K_{k-1}^T R(\overrightarrow{OA_k})}{2S_{k-1,l}}, \\ t_k &= -\nabla q_{k-1,l}^{A_k} \cdot K_{k-1}^T R(\overrightarrow{OA_k}) = -\frac{R(\overrightarrow{O_{k-1} O}) \cdot K_{k-1}^T R(\overrightarrow{OA_k})}{2S_{k-1,l}}, \end{aligned}$$

极小问题 (9) 等价为求解下面的问题, 即

$$\min_{u_{A_1}, \dots, u_{A_N}} S \iff \frac{\partial S}{\partial u_{A_k}} = 0, \quad (1 \leq k \leq N)$$

则有

$$(u_{A_k} - u_O) (v_k - t_k) = -(u_k - u_O) g_k + (u_{k-1} - u_O) w_k, \quad (1 \leq k \leq N) \quad (10)$$

表达式 (10) 可写成矩阵形式, 即

$$A_{N \times N} U_{N \times 1} = G_{N \times N} W_{N \times 1},$$

其中

$$U = (u_{A_1} - u_O, \dots, u_{A_N} - u_O)^T, \quad W = (u_1 - u_O, \dots, u_N - u_O)^T,$$

则

$$U_{N \times 1} = C_{N \times N} W_{N \times 1}, \quad C_{N \times N} = A^{-1} W.$$

于是, 有

$$u_{A_k} - u_O = \sum_{m=1}^N C_{km} (u_m - u_O), \quad (1 \leq k \leq N). \quad (11)$$

最后, 用最小二乘法保持边 $\overrightarrow{OO_k}$ ($1 \leq k \leq N$) 两侧流的法向分量连续, 以此来确定节点量 u_O , 即要求

$$\min_{u_O} R, \quad R = \sum_{k=1}^N R_k^2 \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} R_k &= (\nabla p_{k,l} - \nabla p_{k,r}) \cdot R(\overrightarrow{OO_k}) \\ &= (h_k - e_k)(u_k - u_O) + d_k(u_{A_k} - u_O) - z_k(u_{A_{k+1}} - u_O), \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} h_k &= -\nabla q_{k,r} \cdot R(\overrightarrow{OO_k}) = -\frac{\overrightarrow{OA_k} \cdot \overrightarrow{OO_k}}{2S_{k,r}}, & d_k &= -\nabla q_{k,r}^{A_k} \cdot R(\overrightarrow{OO_k}) = \frac{|\overrightarrow{OO_k}|^2}{2S_{k,r}}, \\ e_k &= -\nabla q_{k,l} \cdot R(\overrightarrow{OO_k}) = -\frac{\overrightarrow{OA_{k+1}} \cdot \overrightarrow{OO_k}}{2S_{k,l}}, & z_k &= -\nabla q_{k,l}^{A_k} \cdot R(\overrightarrow{OO_k}) = \frac{|\overrightarrow{OO_k}|^2}{2S_{k,l}}, \end{aligned}$$

将 (11) 式带入 R_k , 整理后可得

$$\begin{aligned} R_k &= \sum_{m=1}^N (d_k C_{k,m} - z_k C_{k+1,m}) (u_m - u_O) + (h_k - e_k)(u_k - u_O) \\ &= \sum_{m=1}^N E_{k,m} (u_m - u_O), \end{aligned} \quad (13)$$

R_k 可用矩阵元素 $E_{k,m}$ 表达. 极小问题 (12) 等价为求解下面的问题, 即

$$\min_{u_O} R \iff 0 = \frac{\partial R}{\partial u_O} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial R_k}{\partial u_O} R_k,$$

(13) 式带入上式, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial R_k}{\partial u_O} R_k = - \sum_{k=1}^N \left[\sum_{m=1}^N E_{k,m} \left(\sum_{n=1}^N E_{k,n} u_n - \sum_{n=1}^N E_{k,n} u_O \right) \right] \\ &= - \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N E_{k,n} \sum_{m=1}^N E_{k,m} \right) u_n + \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N E_{k,n} \right)^2 u_O, \end{aligned}$$

于是, 节点量 u_O 为

$$u_O = \frac{\sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^N E_{k,n} \sum_{m=1}^N E_{k,m} \right) u_n}{\sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^N E_{k,n} \right)^2} \quad (14)$$

孪生节点量计算方法(14)是文[12]中节点量计算方法的进一步发展,它们的构造思想和步骤基本一致,在各向同性扩散系数情形它们的计算公式只有微小差异,在数值表现上是等价的。方法(14)计算简单,可直接应用于采用(5),(6)式或(7)式计算流的法向分量的差分格式(8)。

4. 数值算例

本节将新的孪生节点量计算方法记为“tritwin”,将之应用于采用(5),(6)式或(7)式计算流的法向分量的扩散差分格式(8)(记为“DS”),通过数值算例测试新的扩散差分格式DS-tritwin在大变形任意多边形网格上和间断扩散系数情形(包括各向同性和各向异性)的数值表现。

为了方便数值比较,记DS为采用算数平均加权方法的扩散差分格式(8);记DS-kd为采用与扩散系数成正比与节点和单元中心间距成反比的加权方式的扩散差分格式(8);记DS-kT为采用文[14]中泰勒展开加权方式的扩散差分格式(8);记DS-ew2为采用文[16]中保线性准则的第二种显式加权方式的扩散差分格式(8)。方法DS-kd和DS-kT适用于各向同性的扩散系数,其余方法都可适用于各向异性的扩散系数。

测试模型为具有Dirichlet边界条件的扩散方程,即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla u) + R, & \Omega = [0, 1] \times [0, 1], t \in [0, \infty) \\ u = u(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = 0 & \end{cases}$$

测试网格包括两大类网格,一类是结构四边形网格,包括光滑网格、随机网格和Kershaw网格(见图3),另一类是非结构三角形网格(见图4)。

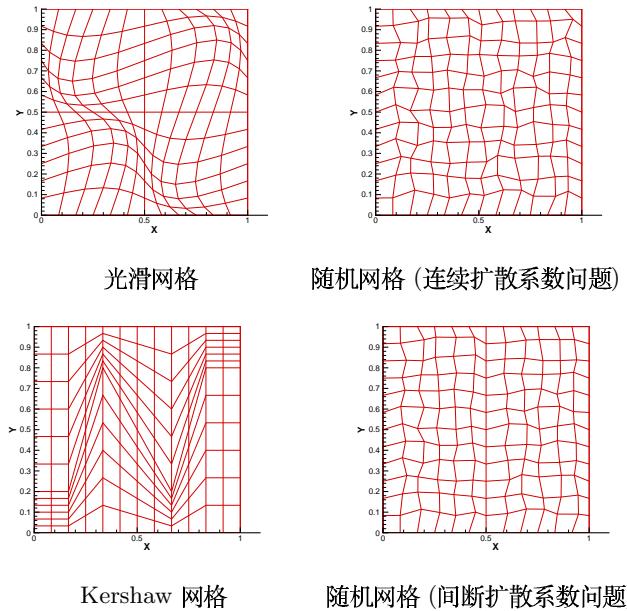


图3 结构四边形网格

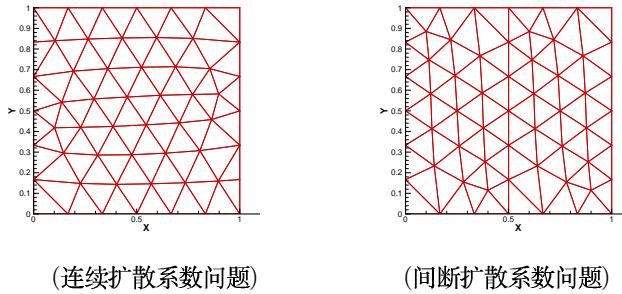


图 4 非结构三角形网格

数值测试中用最大误差 E_{\max}^h 和均方误差 $E_{L^2}^h$ 及其相应的收敛阶 q_{\max} 和 q_{L^2} 来分析计算结果, 其中

$$E_{\max}^h = \max_j |u_j^h - u_j|, \quad E_{L^2}^h = \left(\sum_j (u_j^h - u_j)^2 V_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$q_{\max} = \log_2 \frac{E_{\max}^h}{E_{\max}^{h/2}}, \quad q_{L^2} = \log_2 \frac{E_{L^2}^h}{E_{L^2}^{h/2}},$$

这里 u_j 和 u_j^h 分别表示精确解和数值解在第 j 个单元中心处的值, V_j 表示第 j 个单元的面积, h 在结构网格上表示沿坐标轴的剖分份数, 在非结构网格上表示总单元数.

例 1(各向同性的连续扩散系数问题) 是用上述五个方法分别在测试网格上进行扩散计算, 其中扩散系数和源项分别为

$$K = 1, \quad R = 2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y,$$

精确解为

$$u(x, y, t) = \sin \pi x \sin \pi y.$$

表 1 例 1 结构四边形光滑网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	7.7991E-002	2.8846E-002	8.1354E-003	2.1263E-003	1.94
DS-kd	2.7840E-002	1.2238E-002	3.4090E-003	8.7307E-004	1.97
DS-kT	3.1861E-002	8.8814E-003	2.6129E-003	7.3424E-004	1.83
DS-ew2	3.2567E-002	8.9327E-003	2.6142E-003	7.3429E-004	1.83
DS-tritwin	3.2573E-002	8.9525E-003	2.6148E-003	7.3430E-004	1.83
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	2.1772E-002	8.4715E-003	2.4852E-003	6.5153E-004	1.93
DS-kd	1.4995E-002	4.6651E-003	1.2586E-003	3.2206E-004	1.97
DS-kT	1.6820E-002	4.6294E-003	1.1989E-003	3.0336E-004	1.98
DS-ew2	1.6982E-002	4.6237E-003	1.1983E-003	3.0332E-004	1.98
DS-tritwin	1.7001E-002	4.6147E-003	1.1972E-003	3.0324E-004	1.98

表 2 例 1 结构四边形随机网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	3.4510E-002	2.2773E-002	2.2822E-002	2.2218E-002	0.04
DS-kd	2.3280E-002	9.1007E-003	1.0422E-002	1.0645E-002	-0.03
DS-kT	2.7819E-002	9.9518E-003	2.5042E-003	6.4231E-004	1.96
DS-ew2	2.7552E-002	9.9352E-003	2.5046E-003	6.4396E-004	1.96
DS-tritwin	2.7519E-002	9.9548E-003	2.5153E-003	6.4290E-004	1.97
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	1.2386E-002	7.8517E-003	1.0921E-002	1.0867E-002	0.00
DS-kd	1.1244E-002	2.9922E-003	4.7942E-003	5.1471E-003	-0.10
DS-kT	1.3284E-002	3.1955E-003	8.0735E-004	2.0091E-004	2.01
DS-ew2	1.3276E-002	3.1870E-003	8.1089E-004	2.0187E-004	2.01
DS-tritwin	1.3314E-002	3.2000E-003	8.1528E-004	2.0160E-004	2.02

表 3 例 1 结构四边形 Kershaw 网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	0.218701	0.178855	0.131332	8.2830E-002	0.67
DS-kd	0.194335	0.149298	0.100922	6.1365E-002	0.72
DS-kT	0.127297	8.5363E-002	4.0751E-002	1.4727E-002	1.47
DS-ew2	0.125692	8.5303E-002	4.0777E-002	1.4732E-002	1.47
DS-tritwin	0.126713	8.4766E-002	4.0731E-002	1.4735E-002	1.47
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	9.1323E-002	7.5720E-002	5.2271E-002	3.1254E-002	0.74
DS-kd	7.6367E-002	6.0351E-002	3.9793E-002	2.2796E-002	0.80
DS-kT	4.4570E-002	3.1949E-002	1.5436E-002	5.4218E-003	1.51
DS-ew2	4.3622E-002	3.1805E-002	1.5429E-002	5.4222E-003	1.51
DS-tritwin	4.5520E-002	3.1636E-002	1.5414E-002	5.4237E-003	1.51

表 4 例 1 非结构三角形网格上的计算结果

方法	E_{\max}^{86}	E_{\max}^{344}	E_{\max}^{1376}	q_{\max}
DS	1.5197E-002	4.4168E-003	2.5079E-003	0.82
DS-kd	1.5253E-002	3.9596E-003	1.4970E-003	1.40
DS-kT	1.5194E-002	3.9363E-003	9.6178E-004	2.03
DS-ew2	1.5196E-002	3.7385E-003	9.5217E-004	1.97
DS-tritwin	1.5286E-002	5.0789E-003	1.1208E-003	2.18
方法	$E_{L^2}^{86}$	$E_{L^2}^{344}$	$E_{L^2}^{1376}$	q_{L^2}
DS	6.7270E-003	1.2671E-003	9.6863E-004	0.39
DS-kd	6.7693E-003	1.2051E-003	4.6426E-004	1.38
DS-kT	6.7231E-003	1.6001E-003	3.8777E-004	2.04
DS-ew2	6.7336E-003	1.6260E-003	3.9712E-004	2.03
DS-tritwin	6.8068E-003	1.6866E-003	4.1782E-004	2.01

在所有表中, q_{\max} 和 q_{L^2} 是剖分单元总数最大时的收敛阶。表 1-4 是例 1 的计算结果, 以均方误差对计算结果进行分析。在结构光滑网格上, DS-tritwin 的收敛阶近似二阶, 和其它方法一致。在结构随机网格上, DS-tritwin 与方法 DS-kT 和 DS-ew2 一致, 近似二阶收敛, 而其

它方法没有收敛率。在结构 Kershaw 网格上, DS-tritwin 与方法 DS-kT 和 DS-ew2 一致, 近似 1.5 阶收敛, 其它方法不到 1 阶收敛。在非结构三角形网格上, DS-tritwin 与方法 DS-kT 和 DS-ew2 一致, 近似 2 阶收敛, 方法 DS-kd 近似 1.4 阶收敛, 方法 DS 近似 0.4 阶收敛。

例 2(各向同性的间断扩散系数问题) 是用上述五个方法分别在测试网格上进行扩散计算, 其中扩散系数和源项分别为

$$K = \begin{cases} 13, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad R = \begin{cases} 26\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 26\pi^2 \sin 5\pi x \sin \pi y, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

精确解为

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \sin \pi x \sin \pi y, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sin 5\pi x \sin \pi y, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

表 5 例 2 结构四边形光滑网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	1.310294	0.272969	8.8082E-002	2.3814E-002	1.89
DS-kd	1.321264	0.275724	9.0251E-002	2.3562E-002	1.94
DS-kT	1.319974	0.270701	8.6303E-002	2.1644E-002	2.00
DS-ew2	1.316067	0.273698	9.0087E-002	2.4503E-002	1.88
DS-tritwin	1.315180	0.273676	9.0081E-002	2.4502E-002	1.88
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	0.409540	7.8453E-002	1.7986E-002	4.4142E-003	2.03
DS-kd	0.417433	7.9861E-002	1.8210E-002	4.4094E-003	2.05
DS-kT	0.417138	7.8179E-002	1.7692E-002	4.5418E-003	1.96
DS-ew2	0.416998	7.8836E-002	1.7973E-002	4.3956E-003	2.03
DS-tritwin	0.417007	7.8836E-002	1.7972E-002	4.3956E-003	2.03

表 6 例 2 结构四边形随机网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	0.622678	0.287584	6.6095E-002	2.4503E-002	1.43
DS-kd	0.619550	0.296741	7.6808E-002	1.1691E-002	2.72
DS-kT	0.615380	0.303483	8.7293E-002	2.2144E-002	1.98
DS-ew2	0.616310	0.305614	8.7397E-002	2.2395E-002	1.96
DS-tritwin	0.616261	0.305607	8.7408E-002	2.2393E-002	1.96
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	0.202890	7.9196E-002	1.6022E-002	9.7073E-003	0.72
DS-kd	0.204010	8.1316E-002	1.5824E-002	4.4518E-003	1.83
DS-kT	0.205054	8.3424E-002	1.8308E-002	4.0013E-003	2.19
DS-ew2	0.205502	8.4006E-002	1.8321E-002	4.0341E-003	2.18
DS-tritwin	0.205566	8.4010E-002	1.8325E-002	4.0342E-003	2.18

表 7 例 2 结构四边形 Kershaw 网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS	0.909723	0.225984	0.125891	7.9926E-002	0.66
DS-kd	0.936175	0.218269	0.104614	6.3296E-002	0.72
DS-kT	0.910157	0.231608	8.0947E-002	3.0257E-002	1.42
DS-ew2	0.913191	0.232462	8.3677E-002	3.1496E-002	1.41
DS-tritwin	0.906089	0.233095	8.4116E-002	3.1558E-002	1.41

方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS	0.307720	8.0672E-002	4.1810E-002	2.3881E-002	0.81
DS-kd	0.314970	7.5241E-002	3.4713E-002	1.9387E-002	0.84
DS-kT	0.312658	7.6083E-002	2.7897E-002	9.8694E-003	1.50
DS-ew2	0.309480	7.3838E-002	2.6441E-002	8.9301E-003	1.57
DS-tritwin	0.305703	7.4190E-002	2.6544E-002	8.9442E-003	1.57

表 8 例 2 非结构三角形网格上的计算结果

方法	E_{\max}^{86}	E_{\max}^{344}	E_{\max}^{1376}	q_{\max}
DS	0.182568	4.9486E-002	1.1505E-002	2.10
DS-kd	0.177249	4.8963E-002	1.2390E-002	1.98
DS-kT	0.174685	4.9128E-002	1.3347E-002	1.88
DS-ew2	0.177629	5.1091E-002	1.3596E-002	1.91
DS-tritwin	0.184403	5.3067E-002	1.3936E-002	1.93

方法	$E_{L^2}^{86}$	$E_{L^2}^{344}$	$E_{L^2}^{1376}$	q_{L^2}
DS	6.5709E-002	1.4444E-002	3.4975E-003	2.05
DS-kd	6.5639E-002	1.4555E-002	3.4885E-003	2.06
DS-kT	6.5370E-002	1.4614E-002	3.6023E-003	2.02
DS-ew2	6.6010E-002	1.5017E-002	3.6949E-003	2.02
DS-tritwin	6.7193E-002	1.5653E-002	3.8898E-003	2.01

表 5-8 是例 2 的计算结果. 以均方误差对计算结果进行分析. 在结构光滑网格、结构随机网格和非结构三角形网格上, DS-tritwin 与其它数值表现好的方法基本一致, 近似 2 阶收敛. 而在结构 Kershaw 网格上, DS-tritwin 达到 1.5 阶左右的收敛, 与方法 DS-kT 和 DS-ew2 基本一致, 而方法 DS 和 DS-kd 不到一阶收敛.

上面两个各向同性扩散系数的算例中, 基于简单性考虑, 方法 DS-tritwin 优于方法 DS-kT 和 DS-ew2, 而基于计算精度的考虑, 方法 DS-tritwin 与方法 DS-kT, DS-ew2 的数值表现相近, 与文 [12] 中的结果一致. 在下面各向异性扩散系数的算例中, 选取方法 DS-ew2 与 DS-tritwin 进行比较.

例 3(连续的各向异性扩散系数问题) 在测试网格(图 4) 上计算扩散问题, 其中扩散系数为

$$K = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix},$$

精确解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((1-x)(1-y))}{\sin(1)} + (1-x)^3 (1-y)^2 \right],$$

进而源项和 Dirichlet 边界上的温度值可确定.

表 9 例 3 结构四边形光滑网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS-ew2	9.5179E-003	4.7485E-003	1.5144E-003	4.2504E-003	1.83
DS-tritwin	9.5240E-003	4.7476E-003	1.5143E-003	4.2504E-004	1.83
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS-ew2	3.3212E-003	1.1283E-003	3.1024E-004	7.9511E-005	1.96
DS-tritwin	3.3284E-003	1.1282E-003	3.1019E-004	7.9507E-005	1.96

表 10 例 3 结构四边形随机网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS-ew2	6.4179E-003	2.8105E-003	9.0518E-004	2.7364E-004	1.73
DS-tritwin	6.4163E-003	2.8098E-003	9.0416E-004	2.7340E-004	1.73
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS-ew2	2.1021E-003	5.9664E-004	1.3506E-004	3.2577E-005	2.06
DS-tritwin	2.1232E-003	6.0090E-004	1.3648E-004	3.2804E-005	2.06

表 11 例 3 结构四边形 kershaw 网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS-ew2	2.6910E-002	9.5047E-003	3.0355E-003	8.6825E-004	1.81
DS-tritwin	3.0088E-002	9.5354E-003	3.0259E-003	8.6658E-004	1.80
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS-ew2	9.2239E-003	2.6326E-003	7.3782E-004	1.9854E-004	1.89
DS-tritwin	1.0354E-002	2.6427E-003	7.3505E-004	1.9807E-004	1.89

表 12 例 3 非结构三角形网格上的计算结果

方法	E_{\max}^{86}	E_{\max}^{344}	E_{\max}^{1376}	q_{\max}
DS-ew2	6.6322E-003	2.5993E-003	8.2506E-004	1.66
DS-tritwin	6.5427E-003	2.7103E-003	5.6380E-004	2.27
方法	$E_{L^2}^{86}$	$E_{L^2}^{344}$	$E_{L^2}^{1376}$	q_{L^2}
DS-ew2	2.2316E-003	5.8437E-004	1.6837E-004	1.80
DS-tritwin	2.1820E-003	5.7180E-004	1.3894E-004	2.04

表 9–12 是例 3 的计算结果. 在所有的结构网格上, 无论最大误差还是均方误差 DS-tritwin 与 DS-ew2 的收敛阶一致. 具体地, 在光滑网格和随机网格上均方误差近似 2 阶收敛, 在 Kershaw 网格上均方误差近似 1.9 阶收敛. 而在非结构三角形网格上, DS-tritwin 的均方误差达到 2 阶左右, 方法 DS-ew2 的均方误差达到 1.8 阶收敛.

例 4(各向异性的间断扩散系数问题) 在部分测试网格上进行扩散计算, 其中源项 $R = 0$, 扩散系数为

$$K = d(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 10 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

精确解为

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \frac{20x}{11} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{9+2x}{11} & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

进而 Dirichlet 边界上的温度值可确定.

表 13 例 4 结构四边形随机网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS-ew2	8.2376E-004	3.3898E-004	2.8139E-004	2.4226E-004	0.22
DS-tritwin	5.5487E-010	3.7882E-011	7.4075E-010	5.2349E-010	-
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS-ew2	1.9125E-004	8.7488E-005	5.8366E-005	4.6333E-005	0.33
DS-tritwin	1.7759E-010	1.1004E-011	2.6425E-010	1.8729E-010	-

表 14 例 4 结构四边形 kershaw 网格上的计算结果

方法	E_{\max}^6	E_{\max}^{12}	E_{\max}^{24}	E_{\max}^{48}	q_{\max}
DS-ew2	4.9894E-003	3.0259E-003	2.0312E-003	1.2110E-003	0.75
DS-tritwin	2.0758E-010	3.7415E-010	6.3527E-010	4.0953E-010	-
方法	$E_{L^2}^6$	$E_{L^2}^{12}$	$E_{L^2}^{24}$	$E_{L^2}^{48}$	q_{L^2}
DS-ew2	1.5716E-003	8.8938E-004	4.6359E-004	2.3261E-004	0.99
DS-tritwin	7.4621E-011	1.2715E-010	1.5580E-010	1.1155E-010	-

表 15 例 4 非结构三角形网格上的计算结果

方法	E_{\max}^{86}	E_{\max}^{344}	E_{\max}^{1376}	q_{\max}
DS-ew2	2.9710E-004	4.0164E-004	2.5636E-004	0.65
DS-tritwin	7.9835E-010	6.3080E-010	1.0888E-010	-
方法	$E_{L^2}^{86}$	$E_{L^2}^{344}$	$E_{L^2}^{1376}$	q_{L^2}
DS-ew2	8.5712E-005	6.9625E-005	3.0989E-005	1.17
DS-tritwin	2.8025E-010	1.8158E-010	3.8478E-011	-

表 13–15 是例 4 的计算结果. 在光滑网格上几乎所有的方法数值表现都不错, 故本例不再进行数值比较. 在结构随机网格, 结构 Kershaw 网格和非结构三角形网格上, 方法 DS-tritwin 的最大误差和均方误差都达到 $E-010$, 这在数值上视为 0, 即没有误差, 而方法 DS-ew2 的误差不能视为 0, 最好的收敛阶数为 1.

由以上四个例子的数值表现说明, 在标量形式的各向同性扩散系数问题上, 方法 DS-tritwin 与其他数值表现好的方法一致, 而在矩阵形式的各向异性扩散系数问题上, 方法 DS-tritwin 具有较高的计算精度.

5. 结 论

本文针对多介质各向异性扩散方程, 设计了一种基于非结构多边形网格的高精度有限体积计算格式; 将孪生逼近节点量计算方法^[12] 拓展到各向异性扩散系数情形, 建立了节点量计算方法, 使算法只依赖于单元中心量. 数值结果表明该算法能较好模拟多介质各向异性扩散问题, 并对大变形网格有较好的适应性, 取得满意结果.

参 考 文 献

- [1] Aavatsmark I, Barkve T, Bøe Ø, Aannseth T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods[J]. SIAM J. Sci. Comput., 1998, 19: 1700-1716.
- [2] Aavatsmark I, Barkve T, Bøe Ø, Aannseth T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part II: Discussion and numerical results[J]. SIAM J. Sci. Comput., 1998, 19: 1717-1736.
- [3] Aavatsmark I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids[J]. Comput. Geosci., 2002, 6: 405-432.
- [4] 符尚武, 付汉清, 沈隆钧. 二维三温热传导方程组的九点差分格式 [J]. 数值计算与计算机应用, 1999, 20: 237-240.
- [5] Hermeline F. A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes[J]. J. Comput. Phys., 2000, 160: 481-499.
- [6] Hermeline F. Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes[J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 2007, 196: 2497-2526.
- [7] Kershaw D S. Differencing of the diffusion equation in Lagrangian hydrodynamic codes[J]. J. Comput. Phys., 1981, 39: 375-395.
- [8] 李德元, 陈光南. 抛物型方程差分方法引论 [M]. 科学出版社, 1995.
- [9] Morel J E, Roberts R M and Shashkov M J. A Local Support-Operators Diffusion Discretization Scheme for Quadrilateral r-z Meshes[J]. J. Comput. Phys., 1998, 144: 17-51.
- [10] 宋淑红, 王双虎. 带间断扩散系数热传导方程的新型自适应数值解法 [J]. 应用数学学报, 2010, 33(5): 942-959.
- [11] 宋淑红, 王双虎. 带间断扩散系数热传导方程的高精度数值模拟方法研究 [J]. 应用数学学报, 2011, 34(2): 229-239.
- [12] 宋淑红, 王双虎. 多介质大变形扩散问题的一种简单高精度算法 [J]. 应用数学学报, 2014, 37(2): 367-378.
- [13] Sheng Z Q and Yuan G W. A nine-point scheme for the approximation of diffusion operators on distorted quadrilateral meshes[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2008, 30(3): 1341-1361.
- [14] 刘学哲, 王瑞利, 林忠, 余云龙. 基于非结构多边形网格的拉氏辐射流体力学计算方法与程序 [M]. 惯性约束聚变科技年报 (下), 2012 版, 中国原子能出版社.
- [15] Wu J M, Dai Z H, Gao Z M and Yuan G W. Linearity preserving nine-point schemes for diffusion equation on distorted quadrilateral meshes[J]. J. Comput. Phys., 2010, 229: 3382-3401.
- [16] Wu J M and Gao Z M. A nine-point scheme with explicit weights for diffusion equation on distorted meshes[J]. Appl. Numer. Math., 2011, 61: 844-867.
- [17] Zhukov V T and Feodoritova O B. Difference schemes for the heat conduction equation based on local least-squares approximations, Preprint No, 97, IPMathem. Akad. Nauk S. S. S. R., Moscow, 1989.