2019 年 8 月 计 算 数 学 第 41 卷第 3 期
Aug., 2019 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.41, No.3

求解定常不可压 Stokes 方程的两层罚函数方法[*1)]

李世顺[2)] 祁粉粉
(河南理工大学数学与信息科学学院, 焦作 454003)

邵新平
(杭州电子科技大学理学院, 杭州 310027)

摘 要

借助于两套有限元网格空间提出了一种求解定常不可压 Stokes 方程的两层罚函数方法. 该方法只需要求解粗网格空间上的 Stokes 方程和细网格空间上的两个易于求解的罚参数方程 (离散后的线性方程组具有相同的对称正定系数矩阵). 收敛性分析表明粗网格空间相对于细网格空间可以选择很小, 并且罚参数的选取只与粗网格步长和问题的正则性有关. 因此罚参数不必选择很小仍能够得到最优解. 最后通过数值算例验证了上述理论结果, 并且数值对比可知两层罚函数方法对于求解定常不可压 Stokes 方程具有很好的效果.

关键词: 两层罚函数方法; 定常不可压 Stokes 方程; 罚参数; 有限元方法

MR (2010) 主题分类: 65N30, 75D05

1. 引 言

我们将研究求解定常不可压 Stokes 方程的两层罚函数方法. 考虑下面模型问题

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u}+\nabla p &= \mathbf{f}, \quad 在\ \Omega\ 内, \\ \mathrm{div}\mathbf{u} &= 0, \quad 在\ \Omega\ 内, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0}, \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset R^2$ 是有界区域, $\nu>0$ 表示黏性系数, $\mathbf{f}$ 表示体积力, $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 和 p 分别表示速度和压力. 问题 (1.1) 的变分形式为: 求 $(\mathbf{u},p)\in(H_0^1(\Omega))^2\times L^2(\Omega)$ 使得

$$\begin{cases} \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})-(\mathrm{div}\mathbf{v},p) &= \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle, \qquad \forall\mathbf{v}\in(H_0^1(\Omega))^2, \\ (\mathrm{div}\mathbf{u},q) &= 0, \qquad \forall q\in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

求解问题 (1.2) 的主要困难在于流场的不可压缩条件, 为了提高求解效率, 罚函数方法被广泛用于求解问题 (1.2) [3–5, 9, 13], 即求 $\mathbf{u}_{\epsilon,h}\in V_h\subset(H_0^1(\Omega))^2$ 使得

$$\nu(\nabla\mathbf{u}_{\epsilon,h},\nabla\mathbf{v}_h)+\frac{1}{\epsilon}(\mathrm{div}\mathbf{u}_{\epsilon,h},\mathrm{div}\mathbf{v}_h)=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}_h\rangle, \quad \forall\mathbf{v}_h\in V_h, \tag{1.3}$$

[*] 2017 年 9 月 2 日收到.
[1)] 基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.11401177, 11701133), 浙江省教育厅科研项目 (No. Y201533698).
[2)] 通信作者: 李世顺, Email: lss6@sina.com.

其中 $\epsilon > 0$ 表示一个小参数. 若速度 $\mathbf{u}_{\epsilon,h}$ 已求出, 则可以得到压力 $p_{\epsilon,h} \in Q_h \subset L^2(\Omega)$. 在一定的假设条件下罚方法 (1.3) 等价于下面混合有限元方法: 求 $(\mathbf{u}_{\epsilon,h}, p_{\epsilon,h}) \in V_h \times Q_h \subset (H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} \nu(\nabla\mathbf{u}_{\epsilon,h}, \nabla\mathbf{v}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{v}_h, p_{\epsilon,h}) &= \langle\mathbf{f}, \mathbf{v}_h\rangle, \qquad \forall\mathbf{v}_h \in V_h, \\ \epsilon(p_{\epsilon,h}, q_h) + (\mathrm{div}\mathbf{u}_{\epsilon,h}, q_h) &= 0, \qquad\qquad \forall q_h \in Q_h. \end{cases}$$

假设 LBB 条件 [2] 成立, 即存在常数 β_0 满足

$$\inf_{0\neq q_h\in Q_h} \sup_{0\neq\mathbf{v}_h\in V_h} \frac{(q_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1\|q_h\|} \geq \beta_0, \quad \forall(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h,$$

这里 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$ 中的范数.

通过消除压力项, 罚函数方法能够近似满足不可压缩约束条件, 并且仅仅需要求解速度场函数. 因此, 罚函数方法是一种非常有效的数值方法. 然而, 该方法仍然存在两个缺陷. 首先该方法不适用于求解低流速问题. 其次, 问题 (1.3) 离散后是一个非常病态的线性方程组, 其条件数为 $O(\frac{1}{\epsilon h^2})$ [12], 这里 h 表示离散的网格步长. 因此当 ϵ 选取很小时, 由于舍入误差的原因导致罚函数方法不稳定. 由文献 [3, 9, 13] 可知, 问题 (1.3) 的误差估计为 $O(\epsilon + R_h)$, 这里 $R_h = \inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_1 + \inf_{q_h\in Q_h}\|q_h - p\|$. 因此要得到最优解, 罚参数 ϵ 必须选择的充分小. 为了提高收敛精度, 文献 [12] 借助于下面外推方法提出了一种修改的罚函数方法.

$$\mathbf{u}_{mn,h} = \mathbf{u}_{\epsilon_n,h} - \epsilon_n\frac{\mathbf{u}_{\epsilon_m,h} - \mathbf{u}_{\epsilon_n,h}}{\epsilon_m - \epsilon_n},$$

$$p_{mn,h} = p_{\epsilon_n,h} - \epsilon_n\frac{p_{\epsilon_m,h} - p_{\epsilon_n,h}}{\epsilon_m - \epsilon_n},$$

这里 $(\mathbf{u}_{\epsilon_m,h}, p_{\epsilon_m,h})$ 和 $(\mathbf{u}_{\epsilon_n,h}, p_{\epsilon_n,h})$ 分别是问题 (1.3) 关于 $\epsilon = \epsilon_m$ 和 $\epsilon = \epsilon_n$ 的解. 该方法在 H^1 范数下的误差估计为 $O(\epsilon_n\epsilon_m + R_h)$. 因此罚参数的选取可以不必 “充分小” , 并且其精度比经典的罚函数方法更高. 为了克服传统罚函数方法缺点, 文献 [4,5] 通过构造罚函数方法的迭代格式提出了一类新的数值方法. 但是该类方法需要多次求解线性方程组, 当网格步长 h 很小时计算量会很大.

两层网格方法是求解非对称椭圆偏微分方程的一种非常有效的方法 [14], 并被用于求解计算流体问题 [7, 8, 10, 11]. 该方法的主要思想是借助于两套有限元网格空间, 将细网格上的复杂问题转化为求解一个细网格上的简单问题和一个粗网格上的问题. 由于粗网格空间相对于细网格空间很小, 所以减少了计算代价. 并且仍能得到原问题的最优解. 本文将结合两层网格方法和罚函数方法的思想, 提出一种新的求解定常不可压 Stokes 方程的两层罚函数方法. 即在粗网格空间上求解 Stokes 方程, 在细网格空间上求解两个罚参数方程, 由于罚参数方程离散后的线性方程组具有相同的对称正定系数矩阵, 故求解比较简单. 收敛性分析表明罚参数可以选取为 $\epsilon = O(H^\sigma)$, 这里 H 表示粗网格步长, $\sigma > 0$ 是只与方程的正则性相关的常数, 通常取值为 1 或 2. 并且当细网格步长选取为 $h = O(H^3)$ 时仍能得到最优的误差结果. 因此粗网格空间相对于细网格空间可以选择很小, 从而罚参数不必选择很小, 并且求解粗网格空间上的 Stokes 方程规模也很小. 数值实验也验证了上述结论. 与修改的罚函数方法相比较的结果表明, 当得到最优解时两层罚函数方法可以选择更大的罚参数且具有更高的效率.

2. 两层罚函数方法的收敛性分析

设 $V_H \times Q_H (\subset V_h \times Q_h)$ 是关于速度和压力的一个粗网格有限元空间, 其中网格步长为 H. 下面将给出求解问题 (1.2) 的两层罚函数方法.

算法 2.1.

步 1. 求 $(\mathbf{u}_H, p_H) \in V_H \times Q_H$ 满足

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}_H, \nabla \mathbf{v}_H) - (\mathrm{div}\mathbf{v}_H, p_H) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_H \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_H \in V_H, \\ (\mathrm{div}\mathbf{u}_H, q_H) &= 0, \quad \forall q_H \in Q_H. \end{cases} \tag{2.1}$$

步 2a. 求 $(\mathbf{u}^h, p^h) \in V_h \times Q_h$ 满足

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}_h) + H^{-\sigma}(\mathrm{div}\mathbf{u}^h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle + (\mathrm{div}\mathbf{v}_h, p_H), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ p^h &= -H^{-\sigma}\mathrm{div}\mathbf{u}^h + p_H. \end{cases} \tag{2.2}$$

步 2b. 求 $(\mathbf{u}_h^*, p_h^*) \in V_h \times Q_h$ 满足

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}_h^*, \nabla \mathbf{v}_h) + H^{-\sigma}(\mathrm{div}\mathbf{u}_h^*, \mathrm{div}\mathbf{v}_h) &= \nu(\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ p_h^* &= -H^{-\sigma}\mathrm{div}\mathbf{u}_h^* + p^h, \end{cases} \tag{2.3}$$

这里 $\sigma > 0$ 表示常数.

注 2.1. 在下面的收敛性分析中, σ 的选取可由混合有限元的误差估计得到, 即,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_1 + \|p - p_H\| \le CH^\sigma, \tag{2.4}$$

这里 C 表示与网格步长无关的常数. 参数 σ 只与问题 (1.2) 的正则性有关. 若问题 (1.2) 是 H^3 正则的且用 $Q_2 - Q_1$ 元离散, 则可知 $\sigma = 2$ [6].

在给出收敛性定理之前首先引入如下重要结论 [1, 6].

引理 2.1. 令 $(\mathbf{u}, p)$ 和 $(\mathbf{u}_H, p_H)$ 分别是问题 (1.2) 和 (2.1) 的解. 假设 LBB 条件满足, 则存在与 H 无关的常数 C_1 满足

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_H\|_1 + \|p - p_H\| \le C_1 \left(\inf_{\mathbf{v}_H \in V_H} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_H\|_1 + \inf_{q_H \in Q_H} \|p - q_H\| \right). \tag{2.5}$$

定理 2.1. 令 $(\mathbf{u}, p)$ 和 $(\mathbf{u}_h^*, p_h^*)$ 分别为问题 (1.2) 和 (2.3) 的解, 假设 LBB 条件成立, 则存在与网格步长 H 和 h 无关的常数 C 满足

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^*\|_1 + \|p - p_h^*\| \le C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\| + H^{2\sigma}\|p - p_H\| \right). \tag{2.6}$$

证明. 问题 (2.2) 和 (2.3) 可以分别整理为

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}^h, \nabla \mathbf{v}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{v}_h, p^h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v_h} \rangle, \quad \forall \mathbf{v_h} \in V_h, \\ H^\sigma(p^h, q_h) + (\mathrm{div}\mathbf{u}^h, q_h) &= H^\sigma(p_H, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h \end{cases} \tag{2.7}$$

和

$$\begin{cases} \nu(\nabla \mathbf{u}_h^*, \nabla \mathbf{v}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{v_h}, p_h^*) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v_h} \rangle, \quad \forall \mathbf{v_h} \in V_h, \\ H^\sigma(p_h^*, q_h) + (\mathrm{div}\mathbf{u}_h^*, q_h) &= H^\sigma(p^h, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.8}$$

由问题 (1.2) 和 (2.8) 可得

$$\begin{cases} \nu(\nabla(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{v}_h) - (\mathrm{div}\mathbf{v}_h, p_h^* - p) &= 0, & \forall \mathbf{v_h} \in V_h, \\ H^\sigma(p_h^* - p, q_h) + (\mathrm{div}(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), q_h) &= H^\sigma(p^h - p, q_h), & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{2.9}$$

令 $(\boldsymbol{\omega}_h, \pi_h) \in V_h \times Q_h$ 为 $(\mathbf{u}, p)$ 的任意一个逼近解. 在问题 (2.9) 中的第一个方程中设 $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h$, 则

$$\begin{aligned} \nu|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h|_1^2 &= \nu(\nabla(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h), \nabla(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h)) \\ &= \nu(\nabla(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h), \nabla(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h)) + \nu(\nabla(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), \nabla(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h)) \\ &\le \nu\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + \nu(\nabla(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), \nabla(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h)) \\ &= \nu\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + (\mathrm{div}(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h), p_h^* - p). \end{aligned} \tag{2.10}$$

类似地, 在问题 (2.9) 中的第二个方程中设 $q_h = p_h^* - \pi_h$, 则

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h), p_h^* - p) &= (\mathrm{div}(\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h), \pi_h - p) + (\mathrm{div}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h), p_h^* - \pi_h) \\ &\quad + (\mathrm{div}(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), p_h^* - \pi_h) \\ &\le \|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \|\pi_h - p\| + \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \|p_h^* - \pi_h\| \\ &\quad - H^\sigma(p_h^* - p, p_h^* - \pi_h) + H^\sigma(p^h - p, p_h^* - \pi_h). \end{aligned} \tag{2.11}$$

由简单计算可知

$$H^\sigma(p_h^* - p, p_h^* - \pi_h) = H^\sigma\|p_h^* - \pi_h\|^2 + H^\sigma(\pi_h - p, p_h^* - \pi_h) \ge H^\sigma(\pi_h - p, p_h^* - \pi_h). \tag{2.12}$$

根据 (2.10)-(2.12) 可得

$$\begin{aligned} \nu|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h|_1^2 &\le \Big(\nu\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + \|\pi_h - p\|\Big)\|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \\ &\quad + \Big(\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + H^\sigma\|\pi_h - p\| + H^\sigma\|p - p^h\|\Big)\|p_h^* - \pi_h\|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

再由 LBB 条件和问题 (2.9) 的第一式可知

$$\begin{aligned} \beta_0\|p_h^* - \pi_h\| &\le \sup_{0 \ne \mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\big|(p_h^* - \pi_h, \mathrm{div}\mathbf{v}_h)\big|}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \\ &= \sup_{0 \ne \mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\big|((p - \pi_h), \mathrm{div}\mathbf{v}_h) + \nu\big(\nabla(\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}), \nabla\mathbf{v}_h\big)\big|}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \\ &\le \|p - \pi_h\| + \nu\|\mathbf{u}_h^* - \mathbf{u}\|_1 \\ &\le \|p - \pi_h\| + \nu\|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + \nu\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

所以由 (2.13) 和 (2.14) 可得

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h|_1^2 \le \left(\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + \frac{1}{\nu}\|\pi_h - p\|\right)\|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 \\ + \frac{1}{\beta_0}\left(\|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + H^\sigma\|\pi_h - p\| + H^\sigma\|p - p^h\|\right)\left(\frac{1}{\nu}\|\pi_h - p\| + \|\mathbf{u}_h^* - \boldsymbol{\omega}_h\|_1 + \|\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}_h\|_1\right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

因为在 $H_0^1(\Omega)$ 空间中 $\|\cdot\|_1$ 和半范 $|\cdot|_1$ 等价, 对不等式 (2.15) 右端展开后的每个乘积项应用均值不等式 $xy \le cx^2 + \frac{1}{4c}y^2$ ($c>0$ 是任意常数), 例如

$$\frac{H^\sigma}{\beta_0}\|p-p^h\|\|\mathbf{u}_h^*-\boldsymbol{\omega}_h\|_1 \le \frac{4H^{2\sigma}}{\beta_0^2}\|p-p^h\|^2+\frac{1}{16}\|\mathbf{u}_h^*-\boldsymbol{\omega}_h\|_1^2,$$

然后再利用三角不等式 $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1 \le \|\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_h\|_1+\|\mathbf{u}_h^*-\boldsymbol{\omega}_h\|_1$ 和 $\|p-p_h^*\| \le \|p-\pi_h\|+\|p_h^*-\pi_h\|$, 由 (2.14) 和 (2.15) 整理可得

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1^2+\|p-p_h^*\|^2 \le C\Big(\|\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_h\|_1^2+\|p-\pi_h\|^2+H^{2\sigma}\|p-p^h\|^2\Big), \tag{2.16}$$

这里常数 $C>0$ 只与 β_0,ν 有关. 因为 $(\boldsymbol{\omega}_h,\pi_h)$ 是任意的, 令 $\|\mathbf{u}-\boldsymbol{\omega}_h\|_1+\|p-\pi_h\| = \inf\limits_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_1+\inf\limits_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\|$, 则由 (2.16) 可得

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1+\|p-p_h^*\| \le C\Big(\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_1+\inf_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\|+H^\sigma\|p-p^h\|\Big). \tag{2.17}$$

与上述分析类似, 由问题 (1.2) 和 (2.7) 可以证明

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^h\|_1+\|p-p^h\| \le C\Big(\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_1+\inf_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\|+H^\sigma\|p-p_H\|\Big), \tag{2.18}$$

最后由 (2.17) 和 (2.18) 可得

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1+\|p-p_h^*\| \le C\Big(\inf_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_1+\inf_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\|+H^{2\sigma}\|p-p_H\|\Big). \tag{2.19}$$

综上可知定理得证.

若有限元估计 $\inf\limits_{\mathbf{v}_h\in V_h}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_1+\inf\limits_{q_h\in Q_h}\|p-q_h\| \le Ch^\sigma$ 成立, 则由引理 2.1 可得 $\|p-p_H\| \le CH^\sigma$. 由定理 2.1 可知, 在细网格空间上达到最优解时细网格步长可取为 $h=O(H^3)$. 因此粗网格空间相对于细网格空间来说很小, 算法 2.1 中步 1 所求解 Stokes 方程比较容易求解. 此外, 由于罚参数可选取为 $O(H^\sigma)$, 且 σ 只与问题 (1.2) 的正则性有关, 因此罚参数可以不必选择很小.

3. 数值实验

本节中将给出一个数值算例验证两层罚函数方法的有效性, 并与修改的罚函数方法 [12] 比较罚参数的选取对收敛性的影响. 该数值实验运行环境为 Intel CPU i5-5300 (内存 4.00 GB).

例 3.1. 考虑区域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ 上的二维定常不可压 Stokes 方程 [4,5]. 右端项 $\mathbf{f}$ 根据下面精确解所确定,

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} x^2(1-x)^2(2y-6y^2+4y^3) \\ y^2(1-y)^2(-2x+6x^2-4x^3)\end{pmatrix},\quad p=x^2-y^2.$$

在实验中采用 Q_2-Q_1 元离散上述问题. 在表 1 中首先给出了例 3.1 当 $\nu=1$ 时速度的精确解 $\mathbf{u}$ 和离散解 $\mathbf{u}_h$ 的误差结果, 其中 “DOFs”表示自由度个数. 数值结果表明有限元解是

最优的, 即满足 $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_1=O(h^2)$. 在实现算法 2.1 时, 首先固定细网格步长 $h=1/128$, 然后取不同的粗网格步长 $H=1/4,1/8,1/16,1/32$. 从表 2 中的数值结果可以看出, 当 $\nu=1$ 时, 粗网格步长 $H=1/8$ 时基本可以得到最优误差. 值得注意的是此时罚参数 $\epsilon=H^2=1/64$. 同样在表 3 中给出了修改的罚函数方法求解例 3.1 的误差结果, 其表明当 $\epsilon_n=1/256$, $\epsilon_m=\epsilon_n/100$ 或者 $\epsilon_n=1/1024$, $\epsilon_m=\epsilon_n/10$ 时才能得到最优误差结果. 这表明两层罚函数方法中的罚参数选取要大很多. 另外给出了黏性系数 ν 取不同值时算法 2.1 的误差结果. 由表 2 可以看出当黏性系数 ν 变小时, 要想得到最优误差粗网格步长 H 需要相应的变小, 从而罚参数也要相应的选择更小, 这表明粗网格步长和罚参数的选取是与黏性系数 ν 是相关的. 最后在计算时间上比较了两层罚函数方法和修改的罚函数方法. 通过表 2 和表 3 可以看出两层罚函数方法具有更高的计算效率.

表 1 例 3.1 有限元解 $\mathbf{u}_h$ 的 H^1 范数误差结果 ($\nu=1$)

h	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
DOFs	578	2178	8450	33282	132098
$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_1$	9.66e-04	2.42e-04	6.02e-05	1.51e-05	3.77e-06

表 2 算法 2.1 求解例 3.1 的 H^1 范数误差结果 ($\epsilon=H^2$)

ν \ H	1/4		1/8		1/16		1/32	
	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)
1	2.34e-05	12.06	3.78e-06	11.97	3.77e-06	12.01	3.77e-06	12.06
1/10	8.13e-05	13.62	4.54e-06	14.10	3.77e-06	13.09	3.77e-06	13.14
1/100	8.27e-05	14.98	6.84e-06	14.63	3.78e-06	19.26	3.77e-06	22.71
1/1000	9.01e-05	15.89	7.71e-06	21.48	3.79e-06	21.97	3.77e-06	31.68

表 3 修改的罚函数方法 [12] 求解例 3.1 的 H^1 范数误差结果 ($\nu=1$)

ϵ_n \ ϵ_m	$\epsilon_n/2$		$\epsilon_n/10$		$\epsilon_n/100$		$\epsilon_n/1000$	
	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)	$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^*\|_1$	Time(s)
1/64	2.41e-04	25.48	4.95e-05	27.04	6.23e-06	28.13	3.80e-06	30.30
1/256	1.65e-05	27.15	4.97e-06	28.44	3.78e-06	28.67	3.78e-06	35.46
1/1024	3.90e-06	28.90	3.77e-06	29.16	3.77e-06	34.88	3.77e-06	36.73

参 考 文 献

[1] Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods[M]. New York: Springer, 2002.

[2] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York: Springer, 1991.

[3] Carey G F, Krishnan R. Penalty approximation of Stokes flow[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1992, 35: 169-206.

[4] Cheng X L, Shaikh A W. Analysis of the iterative penalty method for the Stokes equations[J]. Appl. Math. Lett., 2006, 19: 1024-1028.

[5] Dai X X, Cheng X L. The iterative penalty method for Stokes equations using Q1-P0 element[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 201: 805-810.

[6] Elman H C, David J S, Andrew J W. Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics[M]. New York: Oxford University Press, 2005.
[7] He Y. Two-level method based on finite element and Crank-Nicolson extrapolation for the time-dependent Navier-Stokes equations[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2003, 41(4): 1263-1285.
[8] Huang P, He Y, Feng X. Convergence and stability of two-level penalty mixed finite element method for stationary Navier-Stokes equations[J]. Front. Math. China, 2013, 8: 837-854.
[9] Kheshgi H, Luskin M. Analysis of the finite element variable penalty method for Stokes equations[J]. Math. Comp., 1985, 45(172): 347-363.
[10] Layton W, Tobiska L. A two-level method with backtracking for the Navier-Stokes equations[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1998, 35: 2035-2054.
[11] Layton W, Ye X. Two-level discretizations of the stream function form of the navier-stokes equations[J]. Numer. Funct. Anal. Optim., 1999, 20: 909-916.
[12] Lin S Y, Chin Y S, Wu T M. A modified penalty method for Stokes equations and its applications to Navier-Stokes equations[J], SIAM J. Sci. Comput., 1995, 16(1): 1-19.
[13] Oden J T, Kikuchi N, Song Y J. Penalty finite element methods for the analysis of Stokesian flows[J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 1992, 31: 297-329.
[14] Xu J. Two-grid discretization techinques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J. Numer. Anal., 1996, 33(5): 1759-1777.

TWO-LEVEL PENALTY METHOD FOR THE STEADY INCOMPRESSIBLE STOKES EQUATIONS

Li Shishun Qi FenFen
(*School of Mathematics & Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China*)

Shao Xinping
(*School of Science& Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310027, China*)

Abstract

In this paper, we present a two-level penalty method for the steady incompressible Stokes equations by employing two finite element spaces. This method involves solving one small Stokes equation on the coarse space and two penalty equations on the fine space (the linear systems with same symetric and positive coefficient matrices). The convergence shows that the coarse space can be chosen very small. Moreover, the penalty parameter is only dependent on the coarse mesh size and the regularity of the problem. Therefore, the resulting solution still achieves asymptotically optimal accuracy when the penalty parameter is chosen “not very small”. The numerical results confirm the convergence analysis, and the numerical comparison also shows that this method is efficient for solving the steady incompressible Stokes equations.

Keywords: two-level penalty method; steady incompressible Stokes equations; penalty parameter; finite element method

2010 Mathematics Subject Classification: 65N30, 75D05