2019 年 5 月 计 算 数 学 第 41 卷第 2 期
May, 2019 MATHEMATICA NUMERICA SINICA Vol.41, No.2

关于“一类非奇异 H- 矩阵判定的新条件”一文的注记[*1)]

庹 清 陈 茜
(吉首大学数学与统计学院, 吉首 416000)

摘 要

通过构造新的正对角因子元素, 本文给出了几个判定非奇异 H- 矩阵新的充分条件, 改进和推广了“一类非奇异 H- 矩阵判定的新条件”一文的主要结果, 并用数值例子说明了文中结果判定范围的更加广泛性.

关键词: 非奇异 H- 矩阵; 对角占优性; 不可约; 非零元素链

MR (2010) 主题分类: 15A57, 15A06

1. 引 言

非奇异 H- 矩阵在计算数学和矩阵理论应用中十分重要. 因此, 判别一个矩阵是否为非奇异 H- 矩阵一直是研究的热点, 国内外学者做了许多重要的工作 (见文献 [1-10]). Varga 总结了 20 世纪 70 年代中期之前这方面的研究,Berman 和 Plemmons 则提出了 50 个充分必要条件, 庹清、朱砾、刘建州在文献 [1] 中给出了一类关于非奇异 H- 矩阵新的判定范围更广的充分条件, 改进了已有的结果 (文献 [5-9]), 王建、徐仲、陆全又在文献 [2] 中对这一结果做了进一步改进, 刘长太在文献 [3] 中提出了一类新的迭代形式的判定充分条件, 而且随着 k 值的增大, 迭代式条件会逐渐减弱, 从而拓宽了非奇异 H- 矩阵判定的范围, 改进了文献 [2] 的主要结果. 我们在此基础上通过构造新的正对角因子元素, 得到了几个判定范围更广的新的实用性判别条件, 改进了文献 [1-3] 的主要结果. 最后用数值例子说明了文中结果判定范围的更加广泛性.

首先记 $M_n(C)(M_n(R))$ 为 n 阶复（实）矩阵的集合,$N=1,2,\cdots,n$. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$, 又记 $\Lambda_i(A)=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\forall i\in N$, 如果 $|a_{ii}|>\Lambda_i(A),\forall i\in N$, 则称 A 为严格对角占优矩阵, 记为 $A\in D$.

若存在正对角阵 X, 使得 AX 为严格对角占优矩阵, 则称 A 为广义严格对角占优矩阵, 即 A 为非奇异 H- 矩阵, 记为 $A\in\tilde{D}$.

记

$$\begin{aligned} N_1 &= \{i\in N|0<|a_{ii}|=\Lambda_i(A)\}, \quad N_2=\{i\in N|0<|a_{ii}|<\Lambda_i(A)\},\\ N_3 &= \{i\in N|\,|a_{ii}|>\Lambda_i(A)\}, \qquad N=N_1\oplus N_2\oplus N_3. \end{aligned}$$

若 $N_3=\emptyset$, 则 $A\notin\tilde{D}$; 若 $N_1\bigcup N_2=\emptyset$, 则显然 $A\in\tilde{D}$. 故我们总假设 $N_1\oplus N_2\neq\emptyset$, $N_3\neq\emptyset$.

* 2018 年 3 月 18 日收到.
1) 基金项目: 国家自然科学基金 (11461027) 和湖南省教育厅科研基金 (16A173).

由于 H- 矩阵的主对角元均非零, 因此文中涉及矩阵其对角元均假设为非零. 我们还假定矩阵的每一行的非对角线元素的模和为正, 本文中在不混淆的情况下简记 $\Lambda_i=\Lambda_i(A)$.

定义 1[1]**.** 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为不可约矩阵, 若 $|a_{ii}|\geq\Lambda_i(A)(i\in N)$, 且其中至少有一个严格不等式成立, 则 A 为不可约对角占优矩阵.

定义 2[2]**.** 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$, 若 $|a_{ii}|\geq\Lambda_i(A)(i\in N)$, 且其中至少有一个严格不等式成立, 又对每个等式成立的下标 i, 都存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}\neq 0$, 使得 $|a_{j_kj_k}|>\Lambda_{j_k}(A)$, 则称 A 为具有非零元素链对角占优矩阵.

引理 1[4]**.** 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为不可约对角占优矩阵, 则 $A\in\tilde{D}$.

引理 2[4]**.** 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 为具有非零元素链对角占优矩阵, 则 $A\in\tilde{D}$.

文献 [1] 中给出了如下主要结果:

定理. 设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$, 若对任意 $i\in N_2$ 有

$$|a_{ii}|>\frac{\Lambda_i}{\Lambda_i-|a_{ii}|}\left[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{\Lambda_t-|a_{tt}|}{\Lambda_t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right],$$

且 $|a_{ii}|\neq\sum\limits_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|$, $\forall i\in N_1$, 则 A 是非奇异 H- 矩阵.

其中,

$$P_i(A)=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+r\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|,(i\in N_3),\qquad r=\max_{i\in N_3}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|}\right).$$

我们对该定理条件改进后, 得到了更加简捷实用且判定范围更广的新判定充分条件.

2. 主要结果

为了叙述方便, 引入下列符号:

$$\omega_i=\frac{\Lambda_i(A)}{\Lambda_i(A)+|a_{ii}|}\ (i\in N_2),$$

$$r_1=\max_{i\in N_3}\left(\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}}\right),\quad \delta=\max\{\omega_i,r_1\}$$

$$P_{i,r}(A)=\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+r_1\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\ (i\in N_3).$$

$$h=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\delta(\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|)+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t}{P_{i,r}(A)-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}}\right\}.$$

定理 1. 设 $A\in M_n(c)$, 若满足

$$|a_{ii}|>\frac{\delta}{\omega_i}\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{\omega_t}{\omega_i}+\frac{h}{\omega_i}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|},\ \forall i\in N_2, \tag{1}$$

且对 $\forall i\in N_1$, 存在 $t\in N_2\bigcup N_3$, 使得 $a_{it}\neq 0$, 则 A 是非奇异 H- 矩阵.

证. 由于 $0<r_1\leq r<1$. 根据 $r,P_i(A),r_1,P_{i,r}(A)$ 的定义, 对任意 $i\in N_3$, 有

$$r_1|a_{ii}|\geq\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+r_1\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|},$$

即 $P_{i,r}(A)\leq r_1|a_{ii}|\,(\forall i\in N_3)$, 则有

$$0<\frac{P_{i,r}(A)}{|a_{ii}|}\leq r_1\leq r<1,\quad\forall i\in N_3,$$

又由 ω_i,δ 定义, 对任意 $i\in N_3$ 有

$$\frac{\delta(\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|)+\sum\limits_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t}{P_{i,r}(A)-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}}\leq\frac{\delta\left(P_{i,r}(A)-r_1\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_t(A)}{|a_{tt}|}\right)}{P_{i,r}(A)-\sum\limits_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}}<1,$$

由 h 的定义, 对任意 $i\in N_3$, 有 $0<h<1$, 且

$$hP_{i,r}(A)\geq\delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t+h\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}.\tag{2}$$

对任意 $i\in N_2$, 由 (1) 式有

$$\omega_i|a_{ii}|>\delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\omega_t+h\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|},$$

令

$$R_i\triangleq\frac{1}{\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|}\left[\omega_i|a_{ii}|-\left(\delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\omega_t+h\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}\right)\right].\tag{3}$$

当 $\sum\limits_{t\in N_3}|a_{it}|=0$时, 记 $R_i=+\infty$. 由 (3) 式知 $R_i>0(\forall i\in N_2)$, 又 $0<\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}<1(\forall t\in N_3)$, 从而必有充分小的正数 ε 使 $0<\varepsilon<\min\limits_{i\in N_2}R_i\leq+\infty$, 且 $\max\limits_{t\in N_3}\left\{\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right\}<1$.

构造正对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 记 $B=AD=(b_{ij})$, 其中

$$d_i=\begin{cases}\delta & i\in N_1,\\ \omega_i & i\in N_2,\\ \dfrac{hP_{i,r}(A)}{|a_{ii}|}+\varepsilon & i\in N_3.\end{cases}$$

1) 对任意 $i\in N_1$, 因为对任何 $i\in N_1$, 存在 $t\in N_2\bigcup N_3$, 使得 $a_{it}\neq 0$, 且对任意 $t\in N_3$, 总可以取到充分小的正数 ε, 使得 $0<\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon<\delta<1$, 则有

$$\begin{aligned}\Lambda_i(B)&=\delta\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\\&<\delta\left(\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\right)\\&=\delta\Lambda_i(A)=\delta|a_{ii}|=|b_{ii}|.\end{aligned}$$

2) 对任意 $i \in N_2$, 由 (3) 式有

$$\begin{aligned}
\Lambda_i(B) &= \delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\omega_t + \sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\\
&= \varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}| + \delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\omega_t + h\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}\\
&< R_i\sum_{t\in N_3}|a_{it}| + \delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\omega_t + h\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}\\
&= \omega_i|a_{ii}| = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

3) 对任意 $i \in N_3$, 由 (2) 式有

$$\begin{aligned}
\Lambda_i(B) &= \delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t + \sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\left(\frac{hP_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}+\varepsilon\right)\\
&= \varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}| + \delta\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\omega_t + h\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}\\
&\le \varepsilon\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}| + hP_{i,r}(A)\\
&< \varepsilon|a_{ii}| + hP_{i,r}(A) = |b_{ii}|.
\end{aligned}$$

综上所述, $|b_{ii}| > \Lambda_i(B)$ $(\forall i \in N)$, 即矩阵 B 是严格对角占优矩阵, 故矩阵 A 是非奇异 H- 矩阵.

注 1. 此定理中, 由于对 $\forall i \in N_3, 0 < h < 1$, 有

$$0 < \frac{hP_{i,r}(A)}{|a_{ii}|} < \frac{P_{i,r}(A)}{|a_{ii}|} \le \frac{P_i(A)}{|a_{ii}|} \le \frac{\Lambda_i(A)}{|a_{ii}|} < 1,$$

再根据 ω_i, δ 定义, 对 $\forall i \in N_2$ 有

$$0 < \frac{\Lambda_i - |a_{ii}|}{\Lambda_i} < \omega_i \le \delta < 1.$$

显然定理 1 的条件包含了文献 [1] 中定理 1 的条件, 从而改进了文献 [1] 的主要结果. 而且它比文献 [2,3] 定理 1 中的充分条件判定范围也更为广泛, 后面的数值例子正说明了这一点.

利用引理 1 和引理 2, 类似文献 [1] 的证明方法, 我们有如下结论:

定理 2. 设 $A \in M_n(C)$, A 不可约, 若

$$|a_{ii}| \ge \frac{\delta}{\omega_i}\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{\omega_t}{\omega_i} + \frac{h}{\omega_i}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|},\ \forall i \in N_2, \tag{4}$$

且 (4) 中至少有一个严格不等式成立, 则矩阵 A 是非奇异 H- 矩阵.

定理 3. 设 $A \in M_n(C)$, 若

$$|a_{ii}| \ge \frac{\delta}{\omega_i}\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{\omega_t}{\omega_i} + \frac{h}{\omega_i}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|},\ \forall i \in N_2,$$

$$K(A) = \left[i \in N_2 : |a_{ii}| > \frac{\delta}{\omega_i}\sum_{t\in N_1}|a_{it}| + \sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{\omega_t}{\omega_i} + \frac{h}{\omega_i}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|}\right] \neq \emptyset$$

且 $\forall i \in N-K$, 存在非零元素链 $a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots a_{i_si^*}$, 其中 $i \neq i_1, i_1 \neq i_2, \cdots i_s \neq i^*, i^* \in K$, 则 A 是非奇异 H- 矩阵.

3. 数值实例

例 1. 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 30 & 10 & 60 & 0 & 110 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 50 \end{pmatrix}.$$

易知 $N_1=\{1,2\}, N_2=\{3\}, N_3=\{4,5\}$. 由 $r=r_1=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{\Lambda_3(A)-|a_{33}|}{\Lambda_3(A)}=\frac{3}{5}$, $P_4(A)=2$, $P_5(A)=3$, $P_{4,r}(A)=2$, $P_{5,r}(A)=\frac{5}{2}$, $\max\limits_{i\in N_3}(M_i)=\frac{4}{5}$, 有

$$\begin{aligned} 36=x_3|a_{33}| &< |a_{31}|+|a_{32}|+\max_{i\in N_3}(M_i)|a_{35}|\frac{P_5(A)}{|a_{55}|}=40+110\times\frac{3}{50}\times\frac{4}{5}=45\frac{7}{25} \\ &< |a_{31}|+|a_{32}|+|a_{35}|\frac{P_5(A)}{|a_{55}|}=40+110\times\frac{3}{50}=46\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

显然 A 不满足文献 [1,2] 中定理 1 的条件, 不能判定其为非奇异 H- 矩阵.

又由 $P_{5,r}(A)-|a_{52}|-|a_{53}|x_3-|a_{54}|\frac{P_{4,r}(A)}{|a_{44}|}=\frac{5}{2}-1-\frac{3}{5}-1=-\frac{1}{10}<0$, 故也不能用文献 [3] 中定理 1 来判定.

但是, 由 $\omega_3=\delta=\frac{5}{7}$, $h=\frac{20}{21}$, 有

$$\begin{aligned} 42\frac{6}{7}=\omega_3|a_{33}| &> \delta\sum_{t\in N_1}|a_{3t}|+\omega_3\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{3t}|+h\sum_{t\in N_3}|a_{3t}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|} \\ &= (30+10)\times\frac{5}{7}+0+110\times\frac{1}{20}\times\frac{20}{21}=33\frac{17}{21}. \end{aligned}$$

显然矩阵 A 满足本文定理 1 的条件, 可知矩阵 A 是非奇异 H- 矩阵.

例 2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

易知 $N_2=\{1,2\}, N_3=\{3,4\}$. 且 A 是不可约矩阵. 计算可得 $r=\frac{5}{7}$, $x_2=\frac{\Lambda_2(A)-|a_{22}|}{\Lambda_2(A)}=\frac{2}{9}$, $P_3(A)=\frac{38}{7}$, $P_4(A)=\frac{50}{7}$, 由于 $x_2|a_{22}|=1\frac{5}{9}<|a_{21}|=3$, 显然 A 不能满足文献 [1,2,3] 中定理 1 的条件, 不能判定其为非奇异 H- 矩阵.

但是, 由 $r_1=\delta=\frac{105}{172}$, $\omega_1=\frac{4}{7}$, $\omega_2=\frac{9}{16}$, $P_{3,r}(A)=\frac{419}{86}$, $P_{4,r}(A)=\frac{525}{86}$, $h=\frac{40893}{64736}$, 有

$$\begin{aligned} 3.4286=\omega_1|a_{11}| &> \omega_t\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{1t}|+h\sum_{t\in N_3}|a_{2t}|\frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|} \\ &= 1\times\frac{9}{16}+\frac{40893}{64736}\times(3\times\frac{419}{774}+4\times\frac{105}{172})=3.1309. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.9375 = \omega_2|a_{22}| \quad &> \quad \omega_t \sum_{t\in N_2, t\neq i} |a_{2t}| + h \sum_{t\in N_3} |a_{2t}| \frac{P_{t,r}(A)}{|a_{tt}|} \\ &= \quad 3 \times \frac{4}{7} + \frac{40893}{64736} \times (4 \times \frac{419}{774} + 2 \times \frac{105}{172}) = 3.8534. \end{aligned}$$

矩阵 A 满足本文定理 2 的条件, 可知矩阵 A 是非奇异 H- 矩阵.

参 考 文 献

[1] 庹清, 朱砾, 刘建州. 一类非奇异 H- 矩阵判定的新条件 [J]. 计算数学, 2008, 30(02): 177–182.

[2] 王健, 徐仲, 陆全. 判定广义严格对角占优矩阵的一组新条件 [J]. 计算数学, 2011, 33(3): 225–232.

[3] 刘长太. 非奇异 H 矩阵迭代式充分条件 [J]. 计算数学, 2017, 39(3): 328–336.

[4] Varga R S. On Recurring Theorems on Diagonal Dominance[J]. Lin. Alg. Appl., 1976, 13: 1–9.

[5] 干泰彬, 黄廷祝. 非奇异 H- 矩阵的实用充分条件 [J]. 计算数学, 2004, 26(1): 109–116.

[6] Gan Tai-Bin, Huang Ting-Zhu. Simple Criteria for Nonsingular H-matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 374(2): 317–326.

[7] 黄廷祝. 非奇异 H 矩阵的简捷判据 [J]. 计算数学, 1993, 15(3): 318–328.

[8] 高忠喜, 黄廷祝, 王广彬. 非奇 H- 矩阵的充分条件 [J]. 数学物理学报, 2005, 25A(3): 409–413.

[9] Li W. On Nekrasov Matrices[J]. Linear ALgebra Appl., 1998, 281: 87–90.

[10] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrix in the Mathematical Sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

NOTE ON "ONE TYPE OF NEW CRITERIA CONDITIONS FOR NONSINGULAR H-MATRICES"

Tuo Qing Chen Xi

(*College of Math. and Statistics, Jishou University, Jishou 416000, China*)

Abstract

In this paper, we obtain several new sufficient conditions for nonsingular H-matrix by constructing new positive diagonal factors. Also, our results improve and generalize main achievements of "One Type of New Criteria Conditions for Nonsingular H-matrices". The effectiveness and extension of the result are illustrated by numerical examples.

Keywords: nonsingular H-matrix; diagonally dominant; irreducible; nonzero elements chain

2010 Mathematics Subject Classification: 15A57, 15A06