

# 高波数 Helmholtz 方程的超收敛分析<sup>\*1)</sup>

杜宇

(湘潭大学数学与计算科学学院, 湘潭 411105)

## 摘要

本文考虑求解 Helmholtz 方程的有限元方法的超逼近性质以及基于 PPR 后处理方法的超收敛性质. 我们首先给出了矩形网格上的  $p$ - 次元在收敛条件  $k(kh)^{2p+1} \leq C_0$  下的有限元解和基于 Lobatto 点的有限元插值之间的超逼近以及重构的有限元梯度和精确解之间的超收敛分析. 然后我们给出了四边形网格上的线性有限元方法的分析. 这些估计都给出了与波数  $k$  和网格尺寸  $h$  的依赖关系. 同时我们回顾了三角形网格上的线性有限元的超收敛结果. 最后我们给出了数值实验并且结合 Richardson 外推进一步减少了误差.

**关键词:** 亥姆霍兹方程; PPR 方法; 超收敛; 超逼近

**MR (2010) 主题分类:** 65N12, 65N15, 65N30, 78A40

## 1. 引言

在有限元方法中, 超收敛已经成为了一个重要的研究课题, 见 [1] 及其相关文件. 通常来说, 超收敛方法可以分为两类: 一类是本身具有超收敛性质的有限元方法<sup>[2-4]</sup>; 另一类是具有超收敛性的后处理方法<sup>[5-10]</sup>. 在后处理方法中, 梯度重构方法作为一类重要的方法, 可以帮助我们得到渐近精确的后验误差估计子<sup>[11-13]</sup>, 更准确的特征值近似<sup>[14, 15]</sup>等. SPR(Superconvergent Patch Recovery) 方法是其中一个著名的方法. 该方法由 Zienkiewicz 和 Zhu 于 1992 年提出<sup>[9]</sup>, 现已成为很多商业软件, 如 ANSYS, Abqus 以及 LS-DYNA 中的标准工具. 另外一种重要的方法是 PPR 方法, 由 Zhang 和 Naga 于 2004 年提出<sup>[7]</sup>, 也已被有限元软件 COMDOL 采用为超收敛工具. 本文我们将结合 PPR 方法, 分析和回顾高波数 Helmholtz 方程的超收敛性质.

令  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^2$  上的有界多边形区域. 记  $\Gamma := \partial\Omega$ . 我们考虑 Helmholtz 方程

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \mathbf{i}ku = g \quad \text{on } \Gamma. \tag{1.2}$$

这儿  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  表示虚数单位,  $n$  表示  $\Gamma$  上的单位外法向. 上述方程 (1.1)–(1.2) 是声波散射问题

$$\begin{aligned} & -\Delta u - k^2 u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ & \sqrt{r} \left( \frac{\partial(u - u^{inc})}{\partial r} + \mathbf{i}ku \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

的近似. 这儿  $u^{inc}$  表示入射波,  $k$  表示波数. 我们知道 Robin 边界条件 (1.2) 是散射边界条件的一阶近似. Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 在衰减标量波的频域处理方面有着广泛的应用.

<sup>\*</sup> 2017 年 8 月 26 日收到.

<sup>1)</sup> 基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金 (11601026).

我们知道求解高频 ( $k \gg 1$ ) Helmholtz 方程的有限元方法的收敛误差含有污染误差部分, 即有限元方法满足误差估计: 在网格条件下  $k(kh)^{2p} \leq C_0$  [16, 17], 有

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1(kh)^p + C_2k(kh)^{2p}. \quad (1.3)$$

这儿  $u_h$  表示有限元解,  $h$  表示网格尺寸,  $p$  是有限元的阶数,  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ , 是与  $k$  和  $h$  无关的正常数. 可以看出, 误差估计 (1.3) 的右端第一项与  $H^1$  范数的插值误差相同, 并且当网格满足  $k^2h \leq C$  时, 误差估计 (1.3) 由这一项控制; 但是在其他网格条件下, 误差估计 (1.3) 是由其右端第二项控制的, 例如当  $kh$  固定而  $k$  足够大时. 这儿 (1.3) 的第二项  $C_2k(kh)^{2p}$  被称为污染误差.

关于高波数 Helmholtz 问题的误差分析和算法设计已有大量成果. 读者可以通过 [18–20] 了解有限元方法的渐近误差估计的相关成果. 关于预渐近误差估计, 读者可以参考 [21, 22] 等. 因为污染误差的存在, 相关的算法设计同样重要, 例如连续内罚有限元方法 [16, 23], 谱方法 [24], 间断有限元方法 [25–28] 以及波源转移区域分解算法 [29].

在本文中, 对于 Helmholtz 问题, 我们研究四边形网格上基于 PPR(Polynomial Preserving Recovery) 后处理方法的有限元方法的超收敛性质. PPR 方法的一个重要特点是: 经过 PPR 方法重构后得到的离散梯度具有超收敛性质. 因此对于有限元解具有污染误差的高波数 Helmholtz 问题来说, 研究其超收敛性质不仅具有理论价值, 还有重要的指导意义.

最近, 我们分析了三角形网格上的基于 PPR 方法的数值解的超收敛性质, 并且基于超收敛分析得到渐近精确的后验误差估计子 [30]. 在满足一定条件的网格上, 我们首先给出了线性元解和 Lagrange 插值之间的超逼近估计, 并在此基础上给出了超收敛结果

$$\|\nabla u - G_h u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(kh^{1+\alpha} + (kh)^2 |\log h|^{1/2} + k(kh)^2),$$

其中  $G_h$  是三角形网格上的 PPR 算子. 在节 6 我们简要回顾了相关结论.

本文主要采用插值后处理方法来获得四边形网格上的整体的超收敛性质. 首先, 我们分析有限元解  $u_h$  和有限元插值  $u_I$  之间的超逼近性质, 也就是对误差  $\|\nabla u_h - \nabla u_I\|_{L^2(\Omega)}$  的估计. 当四边形剖分网格越规则, 这一估计的收敛阶越高. 然后我们获得经过 PPR 算子  $G_h$  重构得到的有限元梯度的超收敛结果, 也就是对误差  $\|\nabla u - G_h u_h\|_{L^2(\Omega)}$  的估计. 这一估计的收敛速度要快于有限元解的一阶收敛速度. 并且网格越规则, 收敛速度越快.

但是我们发现 PPR 方法仅仅提高了 (1.3) 右端第一项的收敛阶, 数值解的污染误差 ((1.3) 右端第二项) 并没有减少. 随后我们分析了 PPR 方法对于污染误差的影响, 证明了 PPR 方法无法减少污染误差的阶. 但是这提醒我们可以使用 Richardson 外推方法进一步减少 PPR 方法的误差. 通过数值实验我们发现结合 PPR 方法和 Richardson 外推可以非常有效地减少整体的收敛误差. 除此之外, 我们可以结合 PPR 方法和 Richardson 外推方法定义渐近精确的后验误差估计子.

本文分为 7 节: 第二节介绍了有限元方法, 必要的记号和引理; 在第三节我们介绍了 PPR 后处理方法及其性质; 第四节分析了矩形网格上的超收敛性质和 PPR 方法对污染误差的影响; 在第五节, 我们给出一般四边形网格上的超收敛分析; 在第六节我们简单回顾了三角形上的有限元解的超收敛结果; 最后我们给出数值试验, 首先验证了我们的结论, 其次结合 PPR 方法和 Richardson 外推进一步改进了数值解.

本文中,  $C$  表示与  $k, h, f$  和  $g$  无关的正常数. 我们使用符号  $A \lesssim B$  和  $A \gtrsim B$  分别表示  $A \leq CB$  和  $A \geq CB$ .  $A \approx B$  表示  $A$  和  $B$  等价, 即  $A \lesssim B$  且  $A \gtrsim B$ . 因为我们考虑高频问

题, 所以假设  $k \gg 1$ . 此外为简单起见, 我们假设  $k$  是正常数. 假设  $\Omega$  是严格星型区域, 即存在点  $x_\Omega \in \Omega$  和仅依赖于  $\Omega$  的正常数  $c_\Omega$  使得

$$(x - x_\Omega) \cdot n \geq c_\Omega \quad \forall x \in \Gamma.$$

## 2. 有限元方法

本文将采用 Sobolev 空间中常用的记号<sup>[31, 32]</sup>. 对边界 Lipschitz 连续的任意开区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  以及任意  $s \geq 0$ , 分别记 Sobolev 空间中的范数和半范为  $\|\cdot\|_{s,D}$  和  $|\cdot|_{s,D}$ , 记空间  $L^2(D)$  的内积为  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ . 对  $D$  的边界  $\partial D$ , 记  $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$  为  $L^2(\partial D)$  上的内积. 为简单起见, 我们记  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ .

令  $\mathcal{T}_h$  为区域  $\Omega$  上的规则多边形网格剖分, 例如三角网格和四边形网格.  $\mathcal{E}_h$  表示  $\mathcal{T}_h$  的所有边的集合,  $\mathcal{N}_h$  表示  $\mathcal{T}_h$  的所有节点的集合. 对任意  $K \in \mathcal{T}_h$ , 令  $h_K$  表示其外接圆直径,  $|K|$  表示其面积. 类似地, 对  $e \in \mathcal{E}_h$ , 定义  $h_e := \text{diam}(e)$ . 我们假设  $h_e \asymp h_K \asymp h$ . 我们定义边界边和内部边分别为  $\mathcal{E}_h^B := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \Gamma\}$  和  $\mathcal{E}_h^I := \mathcal{E}_h \setminus \mathcal{E}_h^B$ .

令  $V_h$  表示分片多项式有限元近似空间, 比如三角形网格上的连续分片多项式空间和矩形网格上的双  $p$  多项式空间.

记  $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$ . 则问题 (1.1)–(1.2) 的变分形式为: 求  $u \in H^1(\Omega)$  使得

$$a(u, v) - k^2(u, v) + ik \langle u, v \rangle = (f, g) + \langle g, v \rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.1)$$

则有限元解满足  $u_h \in V_h$  满足

$$a(u_h, v_h) - k^2(u_h, v_h) + ik \langle u_h, v_h \rangle = (f, g) + \langle g, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.2)$$

我们假设  $f$  和  $g$  足够光滑, 使得方程 (1.1)–(1.2) 的解  $u$  具有  $H^{p+2}$ - 正则性. 记

$$C_{p,u,g} = \sum_{j=1}^{p+2} k^{-(j-1)} \|u\|_j + \sum_{j=1}^{p+1} k^{-j} |g|_{H^j(\Gamma)}.$$

**注 1.** 因为  $\|u\|_j$  能够被  $\max(k^0, k^{j-1})$  控制, 所以这里的  $C_{u,g}$  可以看做与  $k$  无关的常数. 读者可以参考 [21, 22, 33] 了解  $u$  与  $k$  的依赖关系的详细分析.

**引理 1.** 设  $u$  和  $u_h$  分别是问题 (1.1)–(1.2) 和方程 (2.2) 的解. 如果网格满足  $k(kh)^{2p} \leq C_0$ ,  $C_0$  是与  $k$  和  $h$  无关的常数, 则有

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1 &\lesssim ((kh)^p + k(kh)^{2p}) \frac{|u|_{p+1}}{k^p}, \\ k \|u - u_h\|_0 &\lesssim ((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) \frac{|u|_{p+1}}{k^p}. \end{aligned}$$

注意到  $\frac{|u|_{p+1}}{k^p} \leq C_{u,g}$ . 引理 1 请读者参考 [17].

定义“能量”范数

$$\|v\| = (|\nabla v|_0^2 + k^2 \|v\|_0^2)^{1/2}.$$

### 3. PPR 方法

本节我介绍 PPR(Polynomial Preserving Recovery) 方法. 定义有限元空间上的梯度重构算子  $G_h : C(\Omega) \rightarrow V_h \times V_h$ : 给定一个连续函数  $v$ , 首先得到  $G_h v$  在各个节点处的值, 然后结合  $V_h$  的节点基函数做插值, 最后得到  $G_h v$  在整个区域上的值.

设  $z_i \in N_h$  是网格上的某一个节点和  $v \in C(\Omega)$ . 下面介绍怎样求解  $G_h v(z_i)$ .

首先, 如果  $z_i$  是某个  $K \in \mathcal{T}_h$  的顶点, 记  $h_i$  为  $z_i$  所在的最长的边的长度. 以  $z_i$  为圆心, 以  $h_i$  为半径的作圆, 我们选取这个圆内的所有节点, 即

$$B_{h_i}(z_i) = \{z \in \mathcal{N}_h : |z - z_i| \leq h_i\}.$$

如果  $B_{h_i}(z_i)$  内部的点的个数小于  $m = (p+2)(p+3)/2$ , 则进一步半径为  $2h_i$  的圆的内部的所有点, 即  $B_{2h_i}(z_i)$ . 以此类推, 直到得到某个  $B_{jh_i}(z_i)$ , 其内部点的个数  $n$  大于等于  $m$ . 此时, 以  $v$  在  $B_{jh_i}(z_i)$  上的点值拟合出  $p+1$  次多项式. 记以  $z_i$  为圆心, 以  $jh_i$  为半径的圆为  $w_{z_i}$ . 设以  $z_i$  为原点的局部坐标  $(x, y)$ , 则拟合出的  $p+1$  次多项式为

$$l_{p+1}(x, y; z_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{a} = \hat{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{a}},$$

其中

$$\mathbf{P} = (1, x, y, \dots, x^{p+1}, x^p y, \dots, y^{p+1}), \quad \hat{\mathbf{P}}^T = (1, \xi, \eta, \dots, \xi^{p+1}, \xi^p \eta, \dots, \eta^{p+1});$$

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad \hat{\mathbf{a}}^T = (a_1, h_i a_2, \dots, h_i^{p+1} a_m).$$

由最小二乘法, 系数向量  $\hat{\mathbf{a}}$  可由下面的线性方程组求出

$$Q^T Q \hat{\mathbf{a}} = Q^T \mathbf{b}_h, \tag{3.1}$$

其中  $\mathbf{b}_h = (v(z_{i1}), v(z_{i2}), \dots, v(z_{in}))$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \cdots & \eta_1^{p+1} \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \cdots & \eta_2^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \eta_n & \cdots & \eta_n^{p+1} \end{pmatrix}.$$

当且仅当  $Q^T Q$  的秩为  $m$  时, 线性方程组存在唯一解. 实际应用中, 当选取的拟合点的个数  $n$  大于  $m$  时, 这个条件通常都自然满足<sup>[34]</sup>. 因此我们后面都假设  $Q$  是满秩的. 此时, 我们令

$$G_h v(z_i) = \nabla l_{p+1}(0, 0; z_i).$$

其次, 如果  $z_i$  是某条边上的点, 即  $\exists e \in \mathcal{E}_h$ , s.t.,  $z_i \in e$ . 设  $z_{e1}$  和  $z_{e2}$  是  $e$  的两个端点,  $(x_j, y_j), j = 1, 2$  是  $z_i$  在以  $z_{ej}$  为原点的局部坐标系中相应的局部坐标. 则定义

$$G_h v(z_i) = \alpha \nabla l_{p+1}(x_1, y_1; z_{e1}) + (1 - \alpha) \nabla l_{p+1}(x_2, y_2; z_{e2}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

权  $\alpha$  等于  $z_i$  到  $z_{e1}$  的距离与到  $z_{e2}$  的距离之比.

最后, 如果  $z_i$  是在单元  $K \in \mathcal{T}_h$  内部, 则令

$$G_h v(z_i) = \sum_{j=1}^{n_K} \alpha_j \nabla l_{p+1}(x_{i_j}, y_{i_j}; z_{Kj}), \quad \sum_{j=1}^{n_K} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j > 0,$$

其中,  $n_K$  是  $K$  的顶点的个数,  $z_{Kj}$  是  $K$  的顶点,  $(x_{i_j}, y_{i_j})$  是顶点  $z_i$  在以  $z_{Kj}$  为原点的局部坐标系中的坐标. 权  $\alpha_j$  是  $z_i$  的重心坐标.

下面介绍一些 PPR 算子  $G_h$  的一些常用性质 [5–7, 35].

- (1) 如果  $v_h$  是  $p+1$  次多项式, 则  $G_h v_h = v_h$ .
- (2)  $\|G_h v\|_{0,K} \lesssim |v|_{1,w_K}$ ,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , 其中  $w_K := \{w_{z_i} : z_i \text{ is a vertix of } K\}$ .
- (3)  $\|\nabla v - G_h v\|_{0,\infty,w_K} \lesssim h^{p+1} |v|_{p+2,\infty,w_K}$ .

**引理 2.** 设  $I_h$  是从  $C(\Omega)$  到  $V_h$  的投影, 满足  $I_h v(z) = v(z)$ ,  $\forall v \in C(\Omega), z \in \mathcal{N}_h$ . 对任意  $v \in H^{p+2}(\Omega)$  和  $K \in \mathcal{T}_h$ , 有

$$\|G_h I_h v - \nabla v\|_{0,K} \lesssim h^{p+1} \|v\|_{p+2,w_K}.$$

**引理 3.** 设  $I_h$  是从  $C(\Omega)$  到  $V_h$  的投影, 满足  $I_h v(z) = v(z)$ ,  $\forall v \in C(\Omega), z \in \mathcal{N}_h$ , 有

$$\|G_h I_h v - \nabla v\|_0 \lesssim h^{p+1} \|v\|_{p+2}.$$

#### 4. 矩形网格上的超收敛性质

本节我们考虑一种特殊情形, 矩形网格上的超收敛性质. 因为网格的特殊性, 我们可以得到任意阶的超收敛估计. 设  $\Omega$  是矩形区域,  $\mathcal{T}_h$  是  $\Omega$  的一个矩形网格剖分. 对任意  $\mathcal{T}_h$  中的矩形  $K$ , 记  $h_K$  为  $K$  的外接圆直径. 我们假设  $\mathcal{T}_h$  是拟一致的正规网格, 并记  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . 定义矩形网格上的有限元空间为

$$V_h := \{v_h \in H^1(\Omega) : v_h|_K \in Q_p(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

其中  $Q_p(K)$  表示  $K$  上的双  $p$  次有限元空间, 即  $Q_p(K) = \text{span} \{x_1^i x_2^j, 0 \leq i, j \leq p\}$ .

我们定义基于 Lobatto 点的 Lagrange 插值算子  $I_h : H^{p+2}(\Omega) \rightarrow V_h$ . 对任意矩形  $K = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \in \mathcal{T}_h$ , 设  $x_1 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_p = x_2$  是区间  $[x_1, x_2]$  的  $p+1$  个 Lobatto 点,  $y_1 = \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_p = y_2$  是区间  $[y_1, y_2]$  的  $p+1$  个 Lobatto 点, 插值算子  $I_h$  满足  $I_h u(\xi_i, \eta_j) = u(\xi_i, \eta_j)$ ,  $0 \leq i, j \leq p$ .

对插值算子, 有下面一个引理 [36].

**引理 4.** 对任意  $u \in H^{p+2}(K)$ , 有估计

$$(\nabla(u - I_h u), \nabla v_h)_K \lesssim h_K^{p+1} |u|_{p+2,K} |v|_{1,K}.$$

由引理 4, 对于 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解, 我们可以得到  $u$  的插值和有限元解之间的超逼近性质.

**定理 1.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是矩形网格  $\mathcal{T}_h$  上的有限元解. 则存在  $C_0$  使得当  $k(kh)^{2p} \leq C_0$  时, 有

$$\|I_h u - u_h\| \lesssim ((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) C_{p,u,g}.$$

**证明.** 为简明起见, 记  $v_h = I_h u - u_h$ , 有

$$\begin{aligned} \|I_h u - u_h\|^2 &= \left( \|\nabla(I_h u - u_h)\|_0^2 + k^2 \|I_h u - u_h\|_0^2 \right)^{1/2} \\ &= \Re \left( (\nabla(I_h u - u_h), \nabla v_h) - k^2 (I_h u - u_h, v_h) + ik \langle I_h u - u_h, v_h \rangle \right) + 2k^2 (I_h u - u_h, v_h) \\ &= \Re \left( (\nabla(I_h u - u), \nabla v_h) - k^2 (I_h u - u, v_h) + ik \langle I_h u - u, v_h \rangle \right) + 2k^2 (I_h u - u_h, v_h) \\ &\lesssim |(\nabla(I_h u - u), \nabla v_h)| + k^2 \|I_h u - u\|_0 \|v_h\|_0 + k \|I_h u - u\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + 2k^2 \|I_h u - u_h\|_0 \|v_h\|_0 \\ &\lesssim h^{p+1} |u|_{p+2,K} |v|_{1,K} + kh^{p+1} |u|_{p+1} \cdot k \|v_h\|_0 + k \|I_h u - u\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + 2k \|u - u_h\|_0 \cdot k \|v_h\|_0 \\ &\lesssim (kh)^{p+1} \|v_h\| C_{p,u,g} + k \|I_h u - u\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} + 2k \|u - u_h\|_0 \cdot k \|v_h\|_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

因为  $I_h u$  可以看做  $u$  在边界  $\Gamma$  上的插值, 我们有

$$k \|I_h u - u\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim k^{1/2} h^{p+1} |u|_{H^{p+1}(\Gamma)} \cdot k^{1/2} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim (kh)^{p+1} \|v_h\| C_{p,u,g}. \tag{4.2}$$

由引理 1, 存在  $C_0$  使得当  $k(kh)^{2p} \leq C_0$ , 有

$$2k \|u - u_h\|_0 \cdot k \|v_h\|_0 \lesssim ((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) \|v_h\| C_{p,u,g}. \tag{4.3}$$

结合不等式 (4.1)–(4.3), 引理得证.

结合 PPR 的性质 (2), 引理 3 和不等式

$$\|\nabla u - G_h u_h\|_0 \leq \|\nabla u - G_h I_h u\|_0 + \|G_h I_h u - G_h u_h\|_0,$$

我们有下面的超收敛估计.

**定理 2.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是矩形网格  $\mathcal{T}_h$  上的有限元解. 则存在  $C_0$  使得当  $k(kh)^{2p} \leq C_0$  时, 有

$$\|\nabla u - G_h u_h\|_0 \lesssim ((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) C_{p,u,g}. \tag{4.4}$$

**注 2.** 由引理 1, 我们知道

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_0 \lesssim ((kh)^p + k(kh)^{2p}) C_{p,u,g}. \tag{4.5}$$

由不等式 (4.4), 重构的有限元解的污染误差为  $C_1 k(kh)^{2p}$ ; 由不等式 (2.2), 有限元解的污染误差是  $C_2 k(kh)^{2p}$ ,  $C_1$  和  $C_2$  是与  $k$  和  $h$  无关的常数. 从我们的分析结果来看, 污染误差中  $k$  和  $h$  的阶都是一样的. 事实上, 我们会在后面的数值实验验证 PPR 方法对污染误差没有任何影响. 尽管如此, 对 Helmholtz 问题的超收敛分析不仅有理论上的意义, 还有实际的指导意义, 这一点我们在后面关于 Richardson 外推方法的数值实验部分给出.

下面我们给出 PPR 方法对污染误差影响的具体分析. 我们首先定义一个椭圆投影  $P_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h$ : 求  $P_h u \in V_h$  满足

$$a(P_h u, v_h) + \mathbf{i}k \langle P_h u, v_h \rangle = a(u, v_h) + \mathbf{i}k \langle u, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \quad (4.6)$$

$u$  的椭圆投影  $P_h u$  可以看做泊松问题

$$\begin{aligned} -\Delta u &= F \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \mathbf{i}ku &= g \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned}$$

的解的有限元近似.  $F$  和  $g$  是由  $u$  决定的函数. 这类椭圆投影常被用于研究 Helmholtz 问题的稳定性等性质 [16, 17, 27, 28].

**引理 5.** 对任意  $u \in H^2$ , 令  $P_h u$  是其椭圆投影. 我们有

$$\|u - P_h u\|_1 \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1, \quad (4.7)$$

$$\|u - P_h u\|_0 \lesssim h \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|. \quad (4.8)$$

**证明.** 这是一个标准的椭圆问题, 很容易得到

$$\|u - P_h u\|_1 \lesssim \inf_{v_h \in V_h} \left( \|u - v_h\|_1^2 + k \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|u - P_h u\|_0 \lesssim h \inf_{v_h \in V_h} \left( \|u - v_h\|_1^2 + k \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}.$$

结合

$$\begin{aligned} k \|u - v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\lesssim k \|u - v_h\|_0 \|u - v_h\|_1 \\ &\lesssim k^2 \|u - v_h\|_0^2 + \|u - v_h\|_1^2 \lesssim \|u - v_h\|, \end{aligned}$$

即可证得 (4.7)–(4.8).

**引理 6.** 假设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $P_h u$  是其椭圆投影,  $I_h u$  是其 Lagrange 插值. 则我们有

$$\|\nabla P_h u - \nabla I_h u\|_0 \lesssim (kh)^{p+1} C_{p,u,g}. \quad (4.9)$$

**证明.** 令  $v_h = P_h u - I_h u$ , 有

$$\begin{aligned} \|P_h u - I_h u\| &= \Re \left( a(P_h u - I_h u, v_h) + \mathbf{i}k \langle P_h u - I_h u, v_h \rangle \right) + k^2 (P_h u - I_h u, v_h) \\ &= \Re \left( a(u - I_h u, v_h) + \mathbf{i}k \langle u - I_h u, v_h \rangle \right) + k^2 (P_h u - I_h u, v_h) \\ &\leq |a(u - I_h u, v_h)| + k \|u - I_h u\|_{L^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} + k^2 \|P_h u - I_h u\|_0 \|v_h\|. \end{aligned}$$

结合引理 4, 不等式 4.2 以及

$$\begin{aligned} k \|P_h u - I_h u\|_0 \cdot k \|v_h\|_0 &\leq \left( k \|P_h u - u\|_0 + k \|u - I_h u\|_0 \right) \|v_h\| \\ &\lesssim (kh)^{p+1} \|v_h\| C_{p,u,g}, \end{aligned}$$

证得 (4.9).

类似于定理 2 的证明, 我们可以得到椭圆算子  $P_h$  的超收敛.

**定理 3.** 假设  $u$  和  $P_h u$  分别是方程 (1.1)–(1.2) 的解和椭圆投影, 我们有

$$\|G_h P_h u - \nabla u\|_0 \lesssim (kh)^{p+1} C_{p,u,g}.$$

显然, 椭圆投影是没有污染误差的, 且没有收敛条件  $k(kh)^{2p} \leq C_0$ .

**定理 4.** 假设  $u_h$  是 Hemlholtz 方程 (1.1)–(1.2) 在矩形网格  $\mathcal{T}_h$  上的有限元解, 则我们有

$$\|G_h u_h - \nabla u_h\|_0 \lesssim ((kh)^p + k(kh)^{2p+1}) C_{p,u,g}. \quad (4.10)$$

**证明.**  $u_h$  可以写作  $P_h u + (u_h - P_h u) := P_h u + \theta_h$ . 由三角不等式,

$$\begin{aligned} \|G_h u_h - \nabla u_h\|_0 &= \|G_h(P_h u + \theta_h) - \nabla(P_h u + \theta_h)\|_0 \\ &\lesssim \|G_h P_h u - \nabla P_h u\|_0 + \|G_h \theta_h - \nabla \theta_h\|_0. \end{aligned}$$

由引理 5,

$$\begin{aligned} \|\nabla u - \nabla P_h u\|_0^2 &\lesssim \inf_{v_h \in V_h} \|u - u_h\|^2 \lesssim |u - I_h u|_1^2 + k^2 \|u - I_h u\|_0^2 \\ &\lesssim h^{2p}(1 + k^2 h^2) \|u\|_p^2 \lesssim (kh)^{2p}(1 + k^2 h^2) C_{p,u,g}^2. \end{aligned}$$

因此, 由定理 3,

$$\begin{aligned} \|G_h P_h u - \nabla P_h u\|_0 &\leq \|G_h P_h u - \nabla u\|_0 + \|\nabla u - \nabla P_h u\|_0 \\ &\lesssim (kh)^{p+1} C_{p,u,g} + (kh)^p(1 + kh) C_{p,u,g} \\ &\lesssim (kh)^p C_{p,u,g}. \end{aligned}$$

下面我们估计  $\|G_h \theta_h - \nabla \theta_h\|_0$ . 由 (2.2) 和 (4.6) 可以看出  $\theta_h$  满足

$$a(\theta_h, v_h) + ik \langle \theta_h, v_h \rangle = -k^2(u - u_h, v_h).$$

显然,  $\theta_h$  可以看作泊松问题

$$\begin{aligned} -\Delta \theta &= -k^2(u - u_h) \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial n} + ik\theta &= 0 \quad \text{on } \Gamma, \end{aligned}$$

的解的有限元近似. 因此,

$$\begin{aligned} \|G_h \theta_h - \nabla \theta_h\|_0 &\leq \|G_h \theta_h - \nabla \theta\|_0 + \|\nabla \theta - \nabla \theta_h\|_0 \\ &\lesssim h \|\theta\|_2 \lesssim k^2 h \|u - u_h\|_0 \\ &\lesssim kh((kh)^{p+1} + k(kh)^{2p}) C_{p,u,g} \\ &\lesssim ((kh)^{p+2} + k(kh)^{2p+1}) C_{p,u,g}. \end{aligned}$$

**注 3.** 尽管 (4.10) 中的误差项  $k(kh)^{2p+1}$  小于算子  $G_h$  的污染误差项  $k(kh)^{2p}$ , 但是关于误差  $\|G_h u_h - \nabla u_h\|_0$  的估计可能并非是最优的. 从后面的数值试验来看, 可能的最优估计是  $\|G_h u_h - \nabla u_h\| \lesssim (kh)^p C_{p,u,g}$ .

本节中, 我们分析了矩形网格下的超收敛结果. 尽管我们可以得到任意次有限元的超逼近性质和超收敛估计, 但是当计算区域不是由矩形区域拼接而成的时候, 矩形网格则难以生成. 下面我们分析一般四边形区域上的超收敛结果.

## 5. 四边形网格上的超收敛估计

本节我们考虑一般四边形网格上的线形有限元方法的超收敛性结果.

假设  $\Omega$  是一个多边形区域, 并且可以剖分成拟一致四边形网格  $\mathcal{T}_h$ . 令  $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$  表示参考单元,  $\hat{Z}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示其四个顶点并且按逆时针排列.  $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示以  $\hat{Z}_i$  为起点的边. 对任意四边形  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $Z_i^K$  表示它的四个顶点. 则存在双线性投影  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$  满足  $F_K(\hat{K}) = K$  和  $F_K(\hat{Z}_i) = Z_i^K (i = 1, 2, 3, 4)$ . 则有限元空间为

$$V_h = \left\{ v_h \in H^1(\Omega) : v_h \circ F_K \in Q_1(\hat{K}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (5.1)$$

我们假设网格  $\mathcal{T}_h$  满足 RDN( $N, \Psi$ ) 条件<sup>[37]</sup>:  $\mathcal{T}_h$  上的任意单元  $K$  被对角线  $d_1$  分割成两个三角形, 记另一条对角线为  $d_2$ , 则两个三角形都满足最大角条件 (即最大的内角都小于某个常数  $\Psi < \pi$ ), 且对角线的长度比小于某个常数 (即满足  $|d_1| / |d_2| < N$ ). 在这种网格下有插值的最优估计

$$\|u - I_h u\|_{0,K} + h |u - I_h u|_{1,K} \lesssim h_K^2 |u|_{2,K},$$

其中  $I_h$  是插值算子, 使得  $I_h u \in V_h$  且  $(I_h u \circ F_K)(\hat{Z}_i) = (u \circ F_K)(\hat{Z}_i)$ .

设  $Z_i^K$  的坐标为  $(x_i^K, y_i^K)$ , 则投影算子  $F_K$  的表达式为

$$x = a_0^K + a_1^K \xi + a_2^K \eta + a_3^K \xi \eta, \quad y = b_0^K + b_1^K \xi + b_2^K \eta + b_3^K \xi \eta,$$

其中  $(\xi, \eta)$  表示参考单元的坐标系, 系数  $a_j^K$  和  $b_j^K$  是

$$\begin{aligned} a_0^K &= \frac{1}{4}(x_1^K + x_2^K + x_3^K + x_4^K), & b_0^K &= \frac{1}{4}(y_1^K + y_2^K + y_3^K + y_4^K), \\ a_1^K &= \frac{1}{4}(-x_1^K + x_2^K + x_3^K - x_4^K), & b_1^K &= \frac{1}{4}(-y_1^K + y_2^K + y_3^K - y_4^K), \\ a_2^K &= \frac{1}{4}(-x_1^K - x_2^K + x_3^K + x_4^K), & b_2^K &= \frac{1}{4}(-y_1^K - y_2^K + y_3^K + y_4^K), \\ a_3^K &= \frac{1}{4}(x_1^K - x_2^K + x_3^K - x_4^K), & b_3^K &= \frac{1}{4}(y_1^K - y_2^K + y_3^K - y_4^K). \end{aligned}$$

我们还假设  $\mathcal{T}_h$  满足 Condition ( $\alpha$ )<sup>[38]</sup>.

**定义 1.** 如果存在常数  $\alpha > 0$ , 使得四边形网格剖分  $\mathcal{T}_h$  满足下列条件

- 任意单元  $K$  满足对角条件, 即两条对角线  $d_j (j = 1, 2)$  上的对应中点  $O_j (j = 1, 2)$  满足

$$d_K = |O_1 O_2| = O(h_K^{1+\alpha}).$$

- 任意两个相邻单元  $K_j (j = 1, 2)$  满足条件

$$a_j^{K_1} = a_j^{K_2} (1 + O(h_{K_1}^\alpha + h_{K_2}^\alpha)), \quad b_j^{K_1} = b_j^{K_2} (1 + O(h_{K_1}^\alpha + h_{K_2}^\alpha)).$$

则称  $\mathcal{T}_h$  满足 Condition( $\alpha$ ).

计算得到  $F_K$  的雅可比矩阵

$$(DF_K)(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} a_1^K + a_3^K \eta & b_1^K + b_3^K \eta \\ a_2^K + a_3^K \xi & b_2^K + b_3^K \xi \end{pmatrix},$$

和雅可比矩阵的行列式  $J_K = J_K(\xi, \eta) = J_0^K + J_1^K \xi + J_2^K \eta$ ,

$$J_0^K = a_1^K b_2^K - a_2^K b_1^K, \quad J_1^K = a_1^K b_3^K - a_3^K b_1^K, \quad J_2^K = b_2^K a_3^K - a_2^K b_3^K.$$

把雅可比矩阵的逆矩阵分解为  $(DF_K)^{-1} = X_0 + X_1$ , 其中

$$X_0 = \begin{pmatrix} b_2^K & -b_1^K \\ -a_2^K & a_1^K \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} b_3^K \\ -a_3^K \end{pmatrix} (\xi, -\eta).$$

可以看出  $X_0$  表示投影中的线性部分,  $X_1$  表示投影中的非线性部分. 对任意定义在  $K$  上的函数  $\phi$ , 令  $\hat{\phi}(\xi, \eta) = \phi \circ F_K$ . 令  $\hat{\nabla} \cdot$  表示参考单元上的梯度算子. 则有

$$(\nabla \phi, \nabla \psi)_K = \int_K (\nabla \phi)^T \nabla \psi dx dy = \int_{\hat{K}} \frac{1}{J_K} (\hat{\nabla} \hat{\phi})^T X^T X (\hat{\nabla} \hat{\psi}) d\xi d\eta.$$

定义

$$(\nabla \phi, \nabla \psi)_K^0 = \int_{\hat{K}} \frac{1}{J_0^K} (\hat{\nabla} \hat{\phi})^T X_0^T X_0 (\hat{\nabla} \hat{\psi}) d\xi d\eta = \int_{\hat{K}} (\hat{\nabla} \hat{\psi})^T B^K \hat{\nabla} \hat{\psi} d\xi d\eta.$$

在本节的剩余部分, 为表示的简单起见, 我们令  $w = u - I_h u$ .

**引理 7.** 假设单元  $K$  满足 Condition ( $\alpha$ ). 则对任意  $v_h \in V_h$ , 有

$$|(\nabla w, \nabla v_h)_K - (\nabla w, \nabla v_h)_K^0| \leq Ch^\alpha |w|_{1,K} |v_h|_{1,K}.$$

证明见 [38, Lemma 3.1].

**引理 8.** 下列不等式成立

$$\left| \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h \right| + \left| \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h \right| \leq Ch^2 |\phi|_{H^3(K)} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)}, \quad (5.2)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h &= O(h^2) |\phi|_{H^3(K)} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)} - \left( \int_{\hat{e}_1} + \int_{\hat{e}_3} \right) \frac{\xi^2 - 1}{2} \partial_\xi^2 \hat{u} \cdot \partial_\xi \hat{v}_h d\xi, \\ \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h &= O(h^2) |\phi|_{H^3(K)} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)} - \left( \int_{\hat{e}_2} + \int_{\hat{e}_4} \right) \frac{\eta^2 - 1}{2} \partial_\eta^2 \hat{u} \cdot \partial_\eta \hat{v}_h d\eta. \end{aligned}$$

证明见 [39].

**引理 9.** 假设  $\mathcal{E}_h^B$  上的任意相邻两边  $e_1$  和  $e_2$  的长度满足关系式  $|h_{e_1} - h_{e_2}| \lesssim h^{1+\alpha}$ . 对任意  $u \in H^3(\Omega)$ , 有估计

$$(\nabla w, \nabla v_h) \lesssim (kh^{1+\alpha} + (kh)^2 + (kh)^2 |\log h|) \|v_h\| C_{2,u,g} \quad \forall v_h \in V_h.$$

证明. 由引理 7, 我们仅需要估计  $(A\nabla w, \nabla v_h)_K^0$ , 即

$$b_{11}^K \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h, \quad b_{12}^K \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h, \quad b_{21}^K \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h, \quad b_{22}^K \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h. \quad (5.3)$$

由引理 8,

$$\left| b_{11}^K \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h + b_{22}^K \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h \right| \lesssim (kh)^2 |v_h|_1 C_{1,u,g}.$$

我们仅需估计 (5.3) 中的第二项和第三项. 在  $K$  的第  $j$  条边  $e_j$  上, 令  $s = \frac{1}{2}h_{e_j}\xi$  和  $\tilde{u}(s) = \hat{u}(\xi)$ . 显然此时有  $\partial_s \tilde{u} = \frac{\partial u}{\partial t_{e_j}}$ ,  $t_{e_j}$  表示边  $e_j$  的单位切向量. 为简单起见, 仍记  $\partial_s \tilde{u}$  为  $\partial_s u$ . 又由  $b_{12}^K = b_{21}^K$  得

$$\begin{aligned} b_{12}^K \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h + b_{21}^K \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h &= O(h^2) |u|_{H^3(K)} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 b_{12}^K \left( \frac{h_{e_j}}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_{e_j}}^{\frac{1}{2}h_{e_j}} \left( \left( \frac{2s}{h_{e_j}} \right)^2 - 1 \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s v_h ds. \end{aligned} \quad (5.4)$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} b_{12}^K \int_{\hat{K}} \partial_\xi \hat{w} \partial_\eta \hat{v}_h + b_{21}^K \int_{\hat{K}} \partial_\eta \hat{w} \partial_\xi \hat{v}_h &= O(h^{k+1}) |u|_{H^{k+2}(\Omega)} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} \left( \frac{h_e}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \left( \left( \frac{2s}{h_e} \right)^2 - 1 \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s [b_{12} v_h] ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} b_{12}^K \left( \frac{h_e}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \left( \left( \frac{2s}{h_e} \right)^2 - 1 \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s v_h ds. \end{aligned}$$

这里  $[b_{12} v_h]|_e = b_{12}^{K_1} v_h|_{K_1} - b_{12}^{K_2} v_h|_{K_2}$ ,  $e$  是  $K_1$  和  $K_2$  的公共边. 由网格  $\mathcal{T}_h$  满足 Condition ( $\alpha$ ) 得矩阵  $B^K$  满足  $\|B^{K_1} - B^{K_2}\| = O(h^\alpha)$ . 对任意边  $e \in \mathcal{E}_h$ , 令  $K_e$  表示包含  $e$  的单元. 由迹定理和逆不等式,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} \left( \frac{h_e}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \left( \left( \frac{2s}{h_e} \right)^2 - 1 \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s [b_{12} v_h] ds \right| \\ &\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} h_e^{2+\alpha} |u|_{H^2(e)} |v_h|_{H^1(e)} \lesssim \sum_{e \in \mathcal{T}_h} h_e^{\frac{3}{2}+\alpha} \|u\|_{3,K_e}^{1/2} \|u\|_{2,K_e}^{1/2} |v_h|_{1,K_e} \\ &\lesssim k^{3/2} h^{3/2+\alpha} |v_h|_1 C_{1,u,g}. \end{aligned}$$

令  $E(s) = \left( \frac{2s}{h_e} \right)^2 - 1$ , 则有  $E = \frac{h_e^2}{48} \partial_s^2 E^2 - \frac{2}{3}$ . 记  $\Omega$  的所有顶点为  $\mathcal{N}_h^v$ . 对任意  $Z \in \mathcal{E}_h^B \setminus \mathcal{N}_h^v$ ,  $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_h^B$  表示包含  $Z$  的两条边. 记  $[b_{12}^{K_Z} h_Z^2]_Z = b_{12}^{K_{e_2}} h_{K_{e_2}}^2 - b_{12}^{K_{e_1}} h_{K_{e_1}}^2$ . 可以看出

$\left[ b_{12}^{K_Z} h_Z^2 \right]_Z \lesssim h^{2+\alpha}$ . 由分部积分公式得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} b_{12}^{K_e} \left( \frac{h_e}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \left( \left( \frac{2s}{h_e} \right)^2 - 1 \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s v_h ds \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} b_{12}^{K_e} \left( \frac{h_e}{2} \right)^2 \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \left( \frac{h_e^2}{48} \partial_s^2 E^2 - \frac{2}{3} \right) \partial_s^2 u \cdot \partial_s v_h ds \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} b_{12}^{K_e} \frac{h_e^4}{192} \int_{-\frac{1}{2}h_e}^{\frac{1}{2}h_e} \partial_s E^2 \partial_s^3 u \cdot \partial_s v_h ds + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} b_{12}^{K_e} \frac{h_e^2}{6} \int_e \frac{\partial^3 u}{\partial t_e^3} v_h dt \\
&\quad - \frac{1}{12} \sum_{Z \in \Gamma \cap \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^v} \left[ b_{12}^{K_Z} h_Z^2 \right]_Z \frac{\partial^2 u}{\partial t_e^2}(Z) v_h(Z) - \frac{1}{12} \sum_{Z \in \mathcal{N}_h^v} b_{12}^{K_Z} h_Z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_e^2}(Z) v_h(Z) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} O(h_e^3) |u|_{H^3(e)} |v_h|_{H^1(e)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} O(h_e^2) |u|_{H^3(e)} \|v_h\|_{L^2(e)} \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^B} O(h_e^{2+\alpha}) \left( \frac{1}{h_e} \int_e \frac{\partial^2 u}{\partial t_e^2} v_h + \int_e \frac{\partial}{\partial t_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t_e^2} v_h \right) \right) + O(h^2) |u|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&= O(h^3) |u|_{H^3(\Gamma)} |v_h|_{H^1(\Gamma)} + O(h^2) |u|_{H^3(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} + O(h^{1+\alpha}) |u|_{H^2(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\quad + O(h^{2+\alpha}) (|u|_{H^3(\Gamma)} \|v_h\|_{L^2(\Gamma)} + |u|_{H^2(\Gamma)} |v_h|_{H^1(\Gamma)}) + O(h^2 |\log h|) \|u\|_3 \|v_h\|_1 \\
&\lesssim (kh)^{5/2} \|v_h\|_1 C_{2,u,g} + (kh)^2 \|v_h\| C_{2,u,g} + kh^{1+\alpha} \|v_h\| C_{1,u,g} + k^2 h^{2+\alpha} \|v_h\| C_{2,u,g} \\
&\quad + k^{3/2} h^{3/2+\alpha} \|v_h\|_1 C_{1,u,g} + k^2 h^2 |\log h| \|v_h\|_1 C_{1,u,g} \\
&\lesssim (kh)^2 (1 + \sqrt{kh}) \|v_h\| C_{2,u,g} + kh^{1+\alpha} (1 + \sqrt{kh}) \|v_h\| C_{1,u,g} + k^2 h^2 |\log h| \|v_h\|_1 C_{1,u,g}
\end{aligned}$$

证毕.

类似于定理 1 证明, 我们可以得到一般四边形网格上的超逼近估计.

**定理 5.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是四边形网格  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元解. 引理 9 的假设满足, 则存在  $C_0$  使得当  $k(kh)^2 \leq C_0$  时, 有

$$\|I_h u - u_h\| \lesssim (kh^{1+\alpha} + (kh)^2 + (kh)^2 |\log h| + k(kh)^2) C_{2,u,g}.$$

**注 4. 1.** 本节的后面内容中, 我们都假设网格  $\mathcal{T}_h$  满足引理 9 的条件.

2. 可以看出, 一般的四边形网格上的超逼近估计比直角网格多出两项  $kh^{1+\alpha}$  和  $(kh)^2 |\log h|$ . 已有的三角形网格的相关结果和本文最后的数值实验证明这两项都是存在的.

类似于上一节中的证明过程, 我们可以得到一般四边形网格上的, 基于 PPR 方法的超收敛结果和 PPR 方法对污染误差的影响. 下面我们仅仅列出这些结果, 读者可以自己完成它们的证明.

**定理 6.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是四边形网格  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元解. 则存在  $C_0$  使得当  $k(kh)^{2p} \leq C_0$  时, 有

$$\|\nabla u - G_h u_h\|_0 \lesssim (kh^{1+\alpha} + (kh)^2 + (kh)^2 |\log h| + k(kh)^2) C_{2,u,g}. \quad (5.5)$$

**定理 7.** 假设  $u_h$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 在四边形网格  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元解, 则我们有

$$\|G_h u_h - \nabla u_h\|_0 \lesssim (kh + (kh)^2 |\log h| + k(kh)^3) C_{2,u,g}. \quad (5.6)$$

### 注 5.

1. 可以看出当  $\alpha = 1$  时, 四边形网格的超收敛估计 (5.5) 与矩形网格上的线性元超收敛估计 (4.4) 相差  $(kh)^2 |\log h|$ . 因此, (5.5) 是否是最优估计仍有待研究.
2. 因为有限元梯度  $\nabla u_h$  都包含污染误差  $k(kh)^2$  (cf. (1.3)), 所以由估计 (5.6) 可以看出, 无论网格多么的规则, 数值梯度  $G_h$  都包含污染项  $k(kh)^2$ .
3. 尽管 PPR 方法没有减少污染误差, 但是当  $\alpha = 1$  时,  $G_h u_h$  的收敛速度为  $O(h^2)$  (忽略  $|\log h|^{1/2}$ ), 这启发我们结合 PPR 和 Richardson 外推进一步减少误差, 并据此得到渐近精确的后验误差估计子. 我们在后面的数值试验中给出了验证.

## 6. 三角形网格上的超收敛

我们已经分析了矩形网格和满足特定条件的四边形网格上的有限元解的超收敛性质. 对一般的多边形区域来说, 三角网格仍然是最常用的有限元网格剖分. 本节我们将回顾这些三角网格应该满足的限制条件和其上的超收敛结果, 具体的证明过程参见 [30].

设  $\mathcal{T}_h$  是  $\Omega$  上的规则的拟一致三角网格剖分,  $V_h$  是连续分片线性有限元空间.

首先, 介绍三角网格的 Condition ( $\alpha$ ). 对任意  $e \in \mathcal{E}_h^I$ ,  $K_e$  和  $K'_e$  表示包含  $e$  的两个三角单元. 令  $\Omega_e = K_e \cup K'_e$ . 参见图 1 和图 2. 对任意  $K_e \in \mathcal{T}_h$ ,  $\theta_e$  表示边  $e$  对应的  $K_e$  三角形内角,  $\mathbf{t}_e$  表示  $e$  上的单位切向量 (沿  $K_e$  边界的逆时针方向). 在单元  $K_e$  上,  $\mathbf{n}_e$  表示边  $e$  上的单位外法向. 上标' 表示在  $K'_e$  上的对应量. 显然,  $\mathbf{t}'_e = -\mathbf{t}_e$  且  $\mathbf{n}'_e = -\mathbf{n}_e$ .

对任意  $e \in \mathcal{E}_h^I$  (见图 1), 如果  $\Omega_e$  的两组对应边的长度相差不超过  $\varepsilon$ , 即

$$|h_{e-1} - h'_{e-1}| + |h_{e+1} - h'_{e+1}| \leq \varepsilon,$$

则我们称  $\Omega_e$  是  $\varepsilon$  近似平行四边形.

对任意  $e \in \mathcal{E}_h^B$  (见图 2), 如果  $K_e$  的两条边  $e-1$  和  $e+1$  的长度相差不超过  $\varepsilon$ , 即

$$|h_{e+1} - h_{e-1}| \leq \varepsilon,$$

则我们称  $K_e$  是  $\varepsilon$  近似等腰三角形.

**定义 2.** 如果存在常数  $\alpha \geq 0$  使得

- (a) 对任意  $e \in \mathcal{E}_h^I$ ,  $\Omega_e$  是  $O(h^{1+\alpha})$  近似平行四边形;
- (b) 对任意  $e \in \mathcal{E}_h^B$ , 三角单元  $\tau_e$  是  $O(h^{1+\alpha})$  近似等腰三角形.

则称三角剖分  $\mathcal{T}_h$  满足 Condition ( $\alpha$ ).

### 注 6.

- 限制条件 “ $O(h^{1+\alpha})$  近似平行四边形” 常被用来估计 Dirichlet 的椭圆问题的有限元解的超收敛性质. 为了解决 Robin 边界条件的困难点, 我们增加了限制条件 “ $O(h^{1+\alpha})$  近似等腰三角形”.

- 如果初始网格是常用的 Delaunay 网格, 通过把每个三角单元分割成四个全等的小三角单元来得到一系列的加密网格, 则这组网格满足  $\alpha = 1$  的 Condition ( $\alpha$ ).

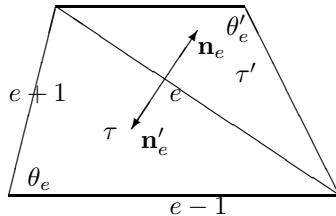
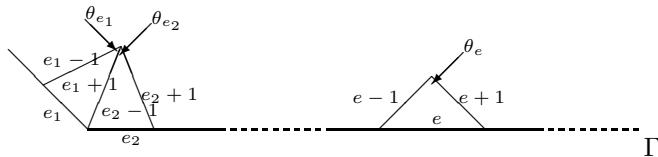
图 1 内部区域  $\Omega_e$  上的符号

图 2 边界单元上的符号

在本节中, 假设三角剖分  $\mathcal{T}_h$  满足 Condition ( $\alpha$ ). 则我们有如下引理.

**引理 10.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解. 对任意  $v_h \in V_h$ ,

$$\left| \int_{\Omega} \nabla(u - I_h u) \cdot \nabla v_h \right| \lesssim (kh^{1+\alpha} + k^2 h^2 |\log h|^{1/2}) \|v_h\| C_{1,u,g}. \quad (6.1)$$

$I_h \cdot$  是 Lagrange 线性插值算子.

**定理 8.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是三角网格  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元解. 则存在与  $k$  和  $h$  无关的常数  $C_0$  使得当  $k(kh)^2 \leq C_0$ , 有

$$\|u_h - u_I\| \lesssim (kh^{1+\alpha} + k^2 h^2 |\log h|^{1/2} + k(kh)^2) C_{1,u,g}. \quad (6.2)$$

**证明.** 证明过程类似于引理 4, 结合引理 10 即可证得.

**注 7.** 数值实验中, 尽管通常我们得到的收敛率大于  $1 + \alpha$ , 但这个收敛率仍然是严格的. 事实上, 对于一般的椭圆问题, 我们可以构造出一组收敛率为  $1 + \alpha$  的特殊的三角网格剖分. 对于高波数 Helmholtz 问题来说, 当网格尺寸足够小时, 这组网格同样适用于验证  $1 + \alpha$  的收敛率.

**定理 9.** 设  $u$  是 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的解,  $u_h$  是三角网格  $\mathcal{T}_h$  上的线性有限元解. 则存在与  $k$  和  $h$  无关的常数  $C_0$  使得当  $k(kh)^2 \leq C_0$ , 有

$$\|G_h u_h - \nabla u\|_0 \lesssim (kh^{1+\alpha} + k^2 h^2 |\log h|^{1/2} + k(kh)^2) C_{1,u,g}. \quad (6.3)$$

类似地, 我们可以得到 PPR 方法对三角网格上的线性有限元解的污染误差的影响.

**定理 10.**  $u_h$  是三角网格  $\mathcal{T}_h$  上 Helmholtz 方程 (1.1)–(1.2) 的线性有限元解. 我们有

$$\|G_h u_h - \nabla u_h\|_0 \lesssim (kh + k^2 h^2 |\log h|^{1/2} + k(kh)^3) C_{1,u,g}. \quad (6.4)$$

**注 8.** 我们回顾了三角形网格上超收敛结果 (6.3), PPR 算子对污染误差的影响 (6.4) 以及需要满足的网格条件 Condition( $\alpha$ ). 与四边形网格相比, 尽管结果类似, 但证明仍有差别, 读者可以参考 [30] 了解更多细节. 至此我们分析了有限元中常见的网格剖分 (三角形网格和四边形) 上的线性元的超收敛性以及矩形网格上的任意次元的超收敛性. 非特殊网格 (比如矩形网格, 正三角形网格等属于特殊网格) 上的高次有限元的超收敛性估计仍然需要进一步研究.

## 7. 数值实验

我们分别使用矩形网格上的  $p$ - 次元和四边形区域上的线性元来计算 Helmholtz 问题 (1.1)–(1.2). 选择适当的  $f$  和  $g$  使得准确解为

$$u = \frac{\cos(kr)}{r} - \frac{\cos k + i \sin k}{k(J_0(k) + iJ_1(k))} J_0(kr).$$

上式是  $u(x)$  的极坐标表达式, 其中  $r = |x|$ ,  $J_0(x)$  和  $J_1(x)$  是第一类 Bessel 函数. 令计算区域为  $\Omega = [1, 2] \times [1, 2]$ .

设  $u_h$  是  $u$  的有限元近似. 记有限元解的  $H^1$ - 半范误差为  $E_g = \|u - u_h\|_1$ , 记 PPR 重构的梯度的误差为  $E_p = \|\nabla u - G_h u_h\|_0$ . 下面我们会计算数值误差以及验证收敛阶  $-\gamma$ . 对不同的网格尺寸  $h_1$  和  $h_2$  以及相对应的误差  $\text{err}_1$  和  $\text{err}_2$ ,

$$\text{err}_1 = Cn_1^\gamma, \quad \text{err}_2 = Cn_2^\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\log \text{err}_1 - \log \text{err}_2}{\log n_1 - \log n_2},$$

其中  $n_i = 1/h_i$ ,  $\text{err}_i$  表示误差  $E_p$  或  $E_g$ .

### 7.1. 有限元解的超收敛性

首先我们使用矩形网格来剖分计算区域  $\Omega$ . 网格  $\mathcal{T}_h^C$  是由  $n^2$  个全等的正方形构成.

对波数  $k = 50$  和  $k = 100$ , 分别使用双线性元, 双二次元和双三次元来求解 Helmholtz 方程. 表 1–3 列出了不同网格尺寸下的有限元解的  $H^1$ - 半范误差  $E_g$  和 PPR 重构的有限元梯度的误差  $E_p$  以及对应的收敛率. 可以看到 PPR 重构的有限元梯度的的收敛率比有限元解的梯度的收敛率高一阶. 因此, 当网格加密到一定程度, PPR 方法的误差要小的多.

为了验证矩形网格下 PPR 方法的污染误差仍然是  $k^{2p+1}h^{2p}$ , 我们计算了当  $k^{2p+1}h^{2p} = 1, 1/2, 1/4$  时, 二次元和三次元的随网格加密时的误差变化, 如图 3. 同时可以看出 PPR 方法可以有效地减少 Helmholtz 方程数值解的误差.

然后我们验证四边形网格上的线性有限元解的超收敛性. 我们经过对矩形网格  $\mathcal{T}_h^C$  的内部节点的随机扰动生成四边形网格  $\mathcal{T}_h^Q$ , 如图 4. 通过连接  $\mathcal{T}_h^Q$  的任意单元  $K$  的两组对边中点来加密网格  $\mathcal{T}_h^Q$ . 表 4 显示当自由度足够大时, 有限元解的  $H^1$ - 半范误差相对于自由度的收敛率是  $-0.5$ , 而 PPR 方法的收敛率是  $-1$ . 图 5 给出了当  $k^3h^2$  固定时, 数值误差随自由度增大的变化曲线图. 可以看到在收敛条件  $k^3h^2 \leq C_0$  下, PPR 方法不仅提高了收敛率而且有效的减少了误差.

表 1 波数  $k = 50$  和  $100$  时, 矩形网格  $\mathcal{T}_h^C$  上的线性有限元的随网格尺寸的误差变化

$n = 1/h$	$k = 50$				$k = 100$			
	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$
511	1.34E-02		4.10E-03		3.95E-02		3.04E-02	
575	1.19E-02	-1.07	3.24E-03	-2.00	3.29E-02	-1.54	2.41E-02	-1.98
639	1.06E-02	-1.06	2.62E-03	-2.00	2.82E-02	-1.48	1.95E-02	-1.99
703	9.60E-03	-1.05	2.17E-03	-2.00	2.46E-02	-1.43	1.62E-02	-1.99
767	8.77E-03	-1.04	1.82E-03	-2.00	2.18E-02	-1.39	1.36E-02	-1.99
831	8.07E-03	-1.03	1.55E-03	-2.00	1.95E-02	-1.35	1.16E-02	-1.99
895	7.48E-03	-1.03	1.34E-03	-2.00	1.77E-02	-1.32	9.98E-03	-1.99
959	6.97E-03	-1.02	1.17E-03	-2.00	1.62E-02	-1.29	8.70E-03	-1.99
1023	6.52E-03	-1.02	1.02E-03	-2.00	1.49E-02	-1.26	7.64E-03	-2.00

表 2 波数  $k = 50$  和  $100$  时, 矩形网格  $\mathcal{T}_h^C$  上的二次元解的随网格尺寸的误差变化.

$n = 1/h$	$k = 50$				$k = 100$			
	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$
256	4.88E-04		1.21E-04		1.96E-03		1.06E-03	
288	3.86E-04	-2.00	8.48E-05	-3.02	1.55E-03	-2.01	7.37E-04	-3.10
320	3.12E-04	-2.00	6.17E-05	-3.02	1.25E-03	-2.01	5.32E-04	-3.09
352	2.58E-04	-2.00	4.63E-05	-3.02	1.04E-03	-2.00	3.97E-04	-3.08
384	2.17E-04	-2.00	3.56E-05	-3.02	8.70E-04	-2.00	3.04E-04	-3.08
416	1.85E-04	-2.00	2.79E-05	-3.02	7.41E-04	-2.00	2.37E-04	-3.07
448	1.59E-04	-2.00	2.23E-05	-3.02	6.39E-04	-2.00	1.89E-04	-3.07
480	1.39E-04	-2.00	1.82E-05	-3.01	5.57E-04	-2.00	1.53E-04	-3.06
512	1.22E-04	-2.00	1.49E-05	-3.01	4.89E-04	-2.00	1.26E-04	-3.06

表 3 波数  $k = 50$  和  $100$  时, 矩形网格  $\mathcal{T}_h^C$  上的三次元解的随网格尺寸的误差变化

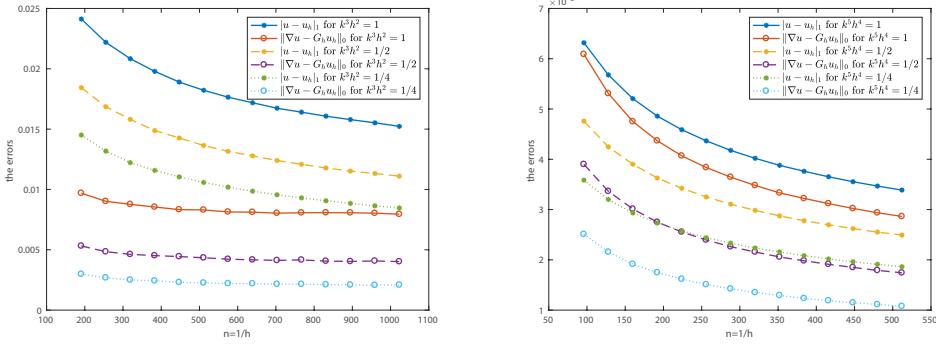
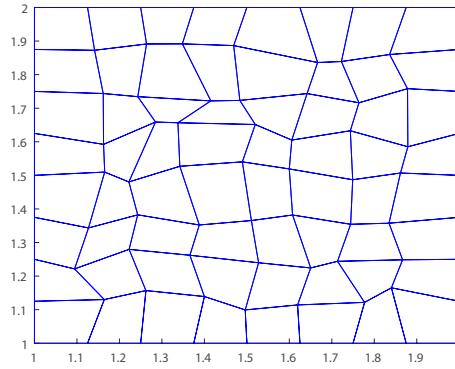
$n = 1/h$	$k = 50$				$k = 100$			
	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$
192	1.47E-05		6.92E-06		1.17E-04		1.11E-04	
213	1.07E-05	-3.00	4.56E-06	-4.01	8.60E-05	-3.00	7.30E-05	-4.00
235	7.99E-06	-3.00	3.08E-06	-4.01	6.41E-05	-3.00	4.93E-05	-4.00
256	6.18E-06	-3.00	2.18E-06	-4.01	4.96E-05	-3.00	3.50E-05	-4.00
277	4.88E-06	-3.00	1.59E-06	-4.01	3.91E-05	-3.00	2.55E-05	-4.00
299	3.88E-06	-3.00	1.17E-06	-4.01	3.11E-05	-3.00	1.88E-05	-4.00
320	3.17E-06	-3.00	8.93E-07	-4.01	2.54E-05	-3.00	1.43E-05	-4.00
341	2.62E-06	-3.00	6.92E-07	-4.01	2.10E-05	-3.00	1.11E-05	-4.00

## 7.2. Richardson 外推

本小节中, 我们尝试使用 Richardson 分别改进有限元解的梯度和经过 PPR 方法重构的数值梯度. Richardson 外推是一种能够有效地提高数值格式 (比如有限元方法和有限差分方法) 精度的方法 [40–44].

表 4 波数  $k = 50$  和  $100$  时, 四边形网格  $\mathcal{T}_h^Q$  上的三次元解的随自由度增加的误差变化

DOFs	$k = 50$				$k = 100$			
	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$	$E_g$	$\gamma$	$E_p$	$\gamma$
25	6.40E-01		6.40E-01		6.36E-01		6.36E-01	
81	6.28E-01	-0.02	6.28E-01	-0.02	6.24E-01	-0.02	6.23E-01	-0.02
289	7.69E-01	0.16	6.34E-01	0.01	6.27E-01	0.00	6.28E-01	0.01
1089	7.16E-01	-0.05	6.15E-01	-0.02	7.62E-01	0.15	6.33E-01	0.01
4225	2.72E-01	-0.71	2.55E-01	-0.65	8.54E-01	0.08	7.12E-01	0.09
16641	8.52E-02	-0.85	7.07E-02	-0.94	4.91E-01	-0.40	4.57E-01	-0.32
66049	3.17E-02	-0.72	1.81E-02	-0.99	1.44E-01	-0.89	1.34E-01	-0.89
263169	1.42E-02	-0.58	4.56E-03	-1.00	4.38E-02	-0.86	3.46E-02	-0.98
1050625	6.84E-03	-0.52	1.14E-03	-1.00	1.63E-02	-0.72	8.71E-03	-1.00

图 3 左图: 固定  $k^3 h^2 = 1, 1/2, 1/4$  时, 矩形网格上的线性有限元解的误差随网格尺寸减小的变化. 右图: 固定  $k^5 h^4 = 1, 1/2, 1/4$  时, 矩形网格上的二次元解的误差随着网格尺寸减小的变化图图 4 四边形网格  $\mathcal{T}_h^Q$ 

对于线性有限元, 由定理 2 和定理 6 显示当网格足够规则时 PPR 方法的误差估计中插值误差和污染误差都是  $h^2$  阶收敛 (暂时忽略  $|\log h|$  项). 因此 Richardson 外推对这两项误差

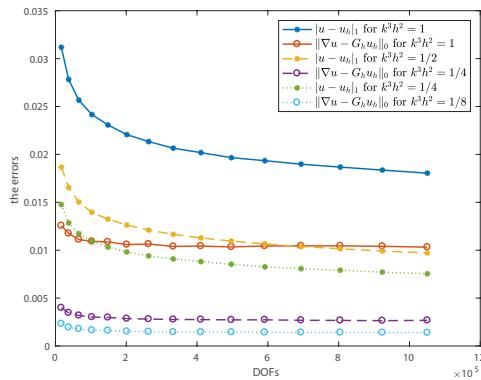


图 5 固定  $k^3 h^2 = 1, 1/2, 1/4$  时, 四边形网格  $\mathcal{T}_h^Q$  上的线性有限元解的误差随自由度增加的变化图

都可以起到作用. 而有限元解的估计中这两项是不同阶的, 因此在不经过 PPR 方法的后处理的情况下, Richardson 外推是不起作用的. 下面我们通过数值实验给出说明.

令  $\mathcal{T}_h$  为四边形网格剖分 (包括矩形剖分),  $\mathcal{T}_{h/2}$  是  $\mathcal{T}_h$  的一次加密. 定义 Richardson 外推算子  $R$

$$Rv_{h/2}|_K = (4v_{h/2} - v_h)/3 \quad \forall K \in \mathcal{T}_{h/2},$$

其中  $v_h$  属于  $V_h$  (见定义 (5.1)).

表 5 波数  $k = 30$  和  $100$  时,  $\mathcal{T}_h^Q$  上的线性有限元解随自由度的增加的误差变化

DOFs	k=30			k=100		
	$E_g$	$E_p$	$E_r$	$E_g$	$E_p$	$E_r$
289	6.18E-01	5.64E-01	6.53E-01	6.27E-01	6.27E-01	6.26E-01
1089	2.43E-01	2.37E-01	3.20E-01	7.71E-01	6.32E-01	6.40E-01
4225	8.57E-02	6.84E-02	3.78E-02	8.28E-01	6.92E-01	6.53E-01
16641	3.57E-02	1.78E-02	2.77E-03	5.10E-01	4.74E-01	4.98E-01
66049	1.68E-02	4.49E-03	1.83E-04	1.53E-01	1.43E-01	8.43E-02
263169	8.27E-03	1.13E-03	1.21E-05	4.58E-02	3.70E-02	6.35E-03
1050625	4.12E-03	2.82E-04	8.85E-07	1.67E-02	9.34E-03	4.10E-04

记经过 PPR 方法和 Richardson 外推后处理的数值梯度和精确解梯度之间的误差为  $E_r = \|\nabla u - RG_h u_h\|_0$ . 表 5 给出了  $k = 30$  和  $100$  时随增加的自由度的对应误差. 可以看到当自由度足够大时,  $RG_h u_h$  的误差远小于其他两种数值误差. 为了证明算子  $RG_h$  的有效性, 我们计算了当  $k^3 h^2$  固定, 网格不断加密时,  $\mathcal{T}_h^C$  上的数值解的误差 (见图 6).

最后我们指出算子  $RG_h$  可以用于定义后验误差估计子

$$\eta_h = \|RG_h u_h - \nabla u_h\|_0.$$

表 6 给出了后验误差估计子与有限元解的  $H^1$ -半范误差之间的比较. 可以看出, 后验误差估计子  $\eta_h$  是渐近准确的.

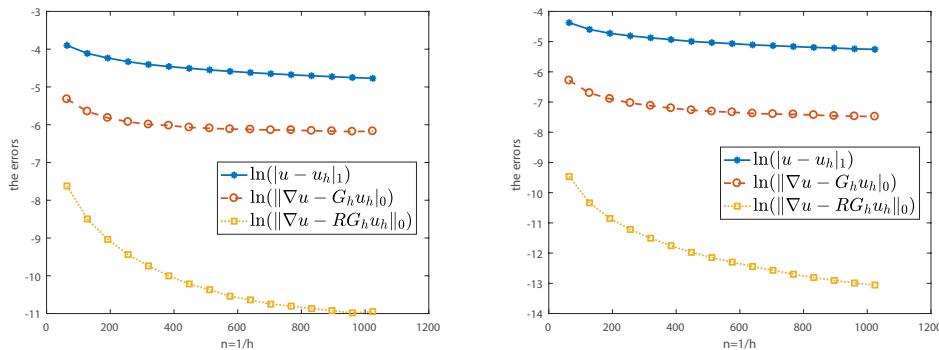


图 6 固定  $k^3 h^2$ ,  $\mathcal{T}_h^C$  上的数值误差随单元尺寸的变化图. 左图: 固定  $k^3 h^2 = 1$ , 右图: 固定  $k^3 h^2 = 1/4$

表 6 对不同波数  $k=30, 60, 120$ ,  $\mathcal{T}_h^Q$  上的有限元解的  $H^1$ -半范误差和后验误差估计子

DOFs	$k=30$		$k=60$		$k=100$	
	$E_g$	$\eta_h$	$E_g$	$\eta_h$	$E_g$	$\eta_h$
1089	2.44E-01	2.77E-01	8.43E-01	5.10E-01	8.67E-01	6.20E-01
4225	8.53E-02	8.19E-02	4.27E-01	2.82E-01	7.93E-01	4.85E-01
16641	3.53E-02	3.50E-02	1.32E-01	1.06E-01	7.24E-01	2.92E-01
66049	1.65E-02	1.65E-02	4.41E-02	4.27E-02	2.33E-01	1.55E-01
263169	8.12E-03	8.12E-03	1.81E-02	1.81E-02	6.63E-02	6.23E-02
1050625	4.04E-03	4.04E-03	8.49E-03	8.49E-03	2.19E-02	2.17E-02

## 参 考 文 献

- [1] Wahlbin L. Superconvergence in Galerkin finite element methods[J]. Springer, 2006.
- [2] Chen C, Hu S. The highest order superconvergence for bi- $k$  degree rectangular elements at nodes: a proof of  $2k$ -conjecture[J]. Mathematics of Computation, 2013, 82(283): 1337-1355.
- [3] Douglas J. Some superconvergence results for Galerkin methods for the approximate solution of two-point boundary problems[J]. Topics in numerical analysis, 1973, pages 89-92.
- [4] Douglas J. Galerkin approximations for the two point boundary problem using continuous, piecewise polynomial spaces[J]. Numerische Mathematik, 1974, 22(2): 99-109.
- [5] Naga A, Zhang Z. A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2004, 42: 1780-1800.
- [6] Naga A, Zhang Z. The polynomial-preserving recovery for higher order finite element methods in 2D and 3D[J]. Discrete and continuous dynamical systems series B, August 2005, 5(3): 759-798.
- [7] Zhang Z, Naga A. A new finite element gradient recovery method: Superconvergence property[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2005, 26: 1192-1213.
- [8] Zienkiewicz O, Zhu J. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1987, 24(2): 337-357.
- [9] Zienkiewicz O, Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992,

- 33(7): 1331-1364.
- [10] Zienkiewicz O, J.Z. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33(7): 1365-1382.
  - [11] Ainsworth M, Oden J. A posteriori error estimation in finite element analysis [J]. John Wiley & Sons, 2011.
  - [12] Babuška I, Strouboulis T, Upadhyay C. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1994, 37(7): 1073-1123.
  - [13] Carstensen C, Bartels S. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. Part I: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM[J]. Mathematics of Computation, 2002, 71(239): 945-969.
  - [14] Guo H, Zhang Z, Zhao R. Superconvergent two-grid methods for elliptic eigenvalue problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 70(1): 125-148.
  - [15] Wu H, Zhang Z. Enhancing eigenvalue approximation by gradient recovery on adaptive meshes[J]. IMA journal of numerical analysis, 2008, 29(4): 1008-1022.
  - [16] Zhu L, Wu H. Pre-asymptotic error Analysis of CIP-FEM and FEM for Helmholtz Equation with high Wave Number. Part II:  $hp$  version[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2013, 51(3): 1828-1852.
  - [17] Du Y, Wu H. Preasymptotic error analysis of higher order FEM and CIP-FEM for Helmholtz equation with high wave number[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2015, 53(2): 782-804.
  - [18] Aziz A, Kellogg R. A scattering problem for the Helmholtz equation [C]. In Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations-III, volume 1, pages 93-95, 1979.
  - [19] Jr J D, Santos J, Sheen D. Approximation of scalar waves in the space-frequency domain[J]. Math. Models Methods Appl. Sci., 1994, 4: 509-531.
  - [20] Schatz A. An observation concerning Ritz-Galerkin methods with indefinite bilinear forms[J]. Math. Comp., 1974, 28: 959-962.
  - [21] Melenk J M, Sauter S. Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet-to-Neumann boundary conditions[J]. Math. Comp., 2010, 79(272): 1871-1914.
  - [22] Melenk J M, Sauter S. Wavenumber Explicit Convergence Analysis for Galerkin Discretizations of the Helmholtz Equation[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2011, 49(3): 1210-1243.
  - [23] Wu H. Pre-asymptotic error Analysis of CIP-FEM and FEM for Helmholtz Equation with high Wave Number. Part I: Linear version[J]. IMA J. Numer. Anal., 2014, 34: 1266-1288.
  - [24] Haldenwang P, Labrosse G, Abboudi S, Deville M. Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 55(1): 115-128.
  - [25] Feng X, Wu H. Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave numbers[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2009, 47(4): 2872-2896.
  - [26] Feng X, Wu H.  $hp$ -discontinuous Galerkin Methods for the Helmholtz Equation with Large Wave Number[J]. Math. Comp., 2011, 80(276): 1997-2024.
  - [27] Zhu L, Du Y. Pre-asymptotic error analysis of  $hp$ -Interior Penalty Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz Equation with large wave number[J]. Comput. Math. Appl., 2015, 70: 917-933.
  - [28] Du Y, Zhu L. Preasymptotic Error Analysis of High Order Interior Penalty Discontinuous Galerkin Methods for the Helmholtz Equation with High Wave Number[J]. J. Sci. Comput., April 2016, 67(1): 130-152.
  - [29] Chen Z, Xiang X. A Source Transfer Domain Decomposition Method For Helmholtz Equations

- in Unbounded Domain[J]. SIAM J. Numer. Anal., 2013, 51: 2331-2356.
- [30] Du Y, Wu H, Zhang Z. Superconvergence analysis of linear FEM based on the polynomial preserving recovery and Richardson extrapolation for Helmholtz equation with high wave number[J]. arXiv:1703.00156, 2017.
- [31] Brenner S, Scott L. The mathematical theory of finite element methods[M]. Springer, New York, third edition, 2008.
- [32] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems[M]. North-Holland Pub. Co., New York, 1978.
- [33] Melenk J, Parsania A, Sauter S. General DG-Methods for Highly Indefinite Helmholtz Problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 57: 536-581.
- [34] Zhang Z. Polynomial preserving recovery for anisotropic and irregular grids[J]. J. Comput. Math., 2004, 22: 331-340.
- [35] Guo H, Yang X. Polynomial preserving recovery for high frequency wave propagation[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 71(2): 594-614.
- [36] Zhang T, Yu S. The derivative patch interpolation recovery technique and superconvergence for the discontinuous Galerkin method[J]. Applied Numerical Mathematics, 2014, 85: 128-141.
- [37] Acosta G, Durán R. Error Estimates for  $Q_1$  Isoparametric Elements Satisfying a Weak Angle Condition[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2000, 38(4): 1073-1088.
- [38] Zhang Z. Polynomial preserving gradient recovery and a posteriori estimate for bilinear element on irregular quadrilaterals[J]. Internat. J. Numer. Anal. Model., 2004, 1: 1-24.
- [39] 林群, 严宁宁. 有效有限元构造与分析 [M]. 河北大学出版社, 1996.
- [40] Marchuk G, Shaidurov V. Difference Methods and Their Extrapolation[M]. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [41] Blum H, Rannacher R. Asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements[J]. Numer. Math., 1986, 49: 11-38.
- [42] Wang J. Asymptotic expansions and  $L^\infty$ -error estimates for mixed finite element methods for second order elliptic problems[J]. Numer. Math., 1989, 55: 401-430.
- [43] Helfrich P. Asymptotic expansion for the finite element approximations of parabolic problems[J]. Bonner Math. Schriften, 1983, 158: 11-30.
- [44] Lin Q, Zhang S, Yan N. Asymptotic error expansion and defect correction for Sobolev and viscoelasticity type equations[J]. J. Comput. Math., 1998, 16: 57-62.

## SUPERCONVERGENCE ANALYSIS FOR THE HELMHOLTZ EQUATION WITH HIGH WAVE NUMBER

Du Yu

(Department of Mathematics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

### Abstract

We study the supercloseness property of the finite element methods and their superconvergence behavior after post-processed by the polynomial preserving recovery (PPR) on both Cartesian and quadrilateral meshes for the two dimensional Helmholtz equation. The

error estimate with explicit dependence on the wave number  $k$  and the mesh condition parameter  $\alpha$  is derived. We first analyze the supercloseness between the finite element solution and the interpolation and the superconvergence for the recovered gradient by PPR under the assumption  $k(kh)^{2p+1} \leq C_0$  ( $h$  is the mesh size) on Cartesian meshes. We then analyze the supercloseness and superconvergence for the linear finite element method on quadrilateral meshes. We also recall our work about superconvergence property of the linear FEM on triangle meshes. Furthermore, we estimate the error between the numerical gradient and recovered gradient, which motivate us to define the a posteriori error estimator and design a Richardson extrapolation to post-process the recovered gradient by PPR. Finally, Some numerical examples are provided to confirm the theoretical results of superconvergence analysis.

**Keywords:** Helmholtz equation; large wave number; superconvergence; PPR; finite element methods

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65N12, 65N15, 65N30, 78A40